percorsi nell'aritmetica
per favorire il pensiero prealgebrico

progetto ArAl

Early Algebra:
un approccio innovativo per la didattica dell'aritmetica e dell'algebra

Giancarlo Navarra

Rozzano - 17 gennaio 2019

Traduci in linguaggio matematico:

- Togli $\boxed{3}$ dal quadruplo di $\boxed{15}$ → $15 \times 4 - 3$
- Togli $\boxed{t}$ dal quadruplo di $\boxed{s}$ → $t - s^2$
- Scrivi il successivo di r → r+r

Gli studenti, per tradurre una frase, dovrebbero saperla interpretare, cioè attribuire un significato alla sua struttura e ai suoi termini e organizzare su di essi una riflessione.

Traduci in lingua italiana:

(a) $\frac{1}{2} \cdot a$ (b) $\frac{a}{2}$ (c) $a : 2$

Vengono percepite in modi diversi:

(a) come moltiplicazione:

- "Moltiplica per un numero la metà di 1".

(b) e (c) come divisioni:

- (b) "Divido a per 2 in frazione"
- (c) "Fai la metà di a"

Sono tutte definizioni **procedurali**.
Si riferiscono al 'cosa **fare**'

$\frac{1}{2}a$

Da un test d'ingresso alla scuola secondaria di 2° grado

Traduci in lingua italiana:

(a) $\frac{1}{2} \cdot a$ (b) $\frac{a}{2}$ (c) $a : 2$

Nessuno le definisce, ad esempio, come:

- (a) Prodotto fra ½ e a
- (b) Rapporto fra a e 2
- (c) Quoziente fra a e 2

Definizioni **relazionali**
Esprimono cos'**è** ognuna di queste scritture

Le ragioni di questa difficoltà sono **nodali**.
Vi torneremo fra poco.

$\frac{1}{2}a$

Da un test d'ingresso alla scuola secondaria di 2° grado

Traduci in lingua italiana:

(a) $\frac{1}{2}\cdot a$ (b) $\frac{a}{2}$ (c) $a:2$

Nessuno le definisce, ad esempio, come:

- (a) Prodotto fra ½ e a
- (b) Rapporto fra a e 2
- (c) Quoziente fra a e 2

Definizioni **relazionali**

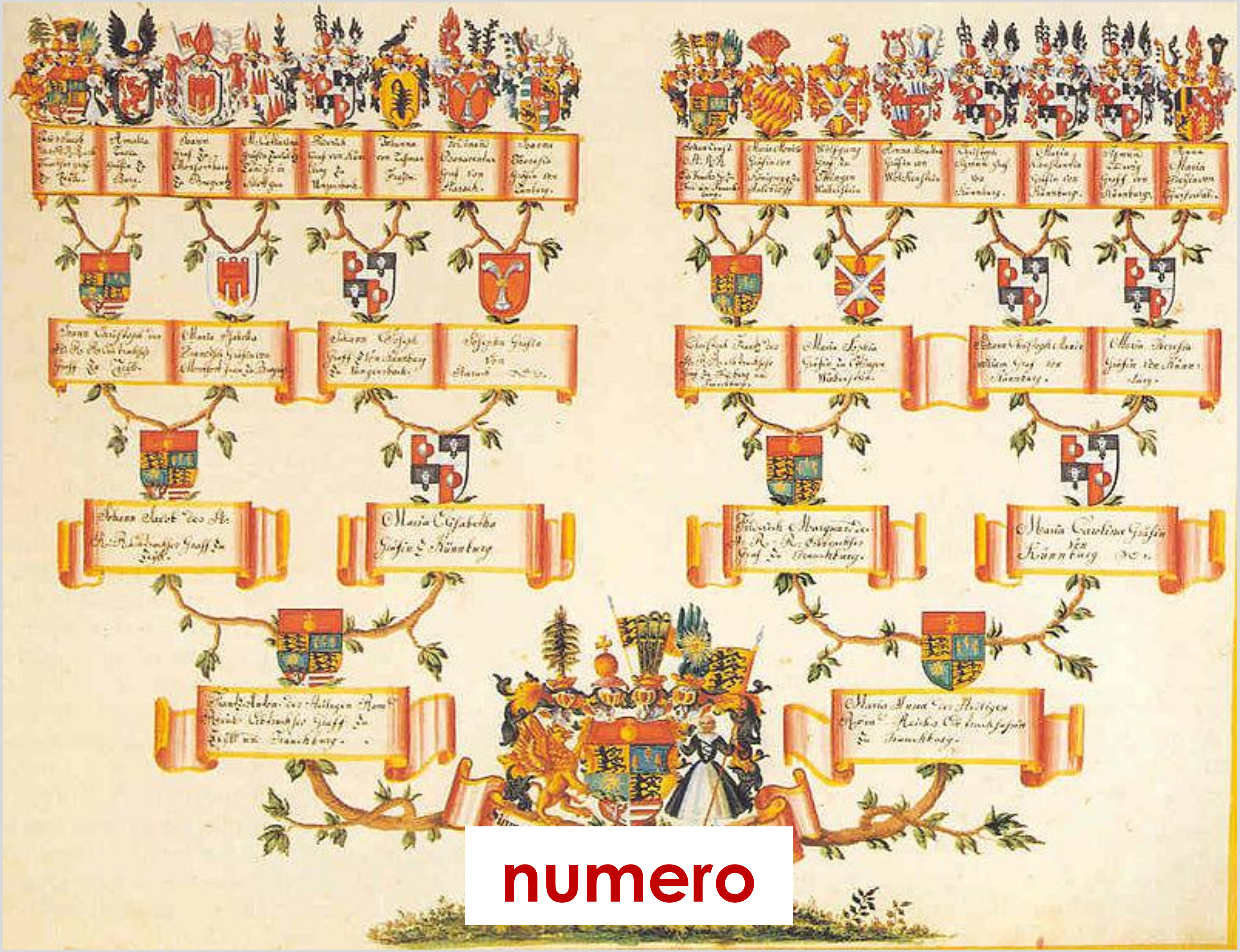
Esprimono cos'**è** ognuna di queste scritture

Le ragioni di questa difficoltà sono **nodali**.

Vi torneremo fra poco.

Un albero genealogico

Un albero genealogico



Pensate a tre numeri

Quanti di voi hanno pensato ad esempio:

$$\sqrt{6} \qquad -13 \qquad \frac{7}{5} \qquad 0{,}28 \qquad 9^2 \qquad (4+6)\times 3$$

L'imprinting del numero naturale

Vorrei farvi riflettere sulle vostre conoscenze

E ora un'altra questione

Cos’**è** $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Sono delle operazioni

Sono calcoli

È un’espressione da risolvere

Devo trovare quanto fa

Bisogna trovare il risultato

Prima si trova la somma, poi si divide...

L’imprinting del **fare**.

Un albero genealogico

Quanto fa

somma

calcoli

uguale

risultato

operazione

3+5=8

addizione

contare

aggiungere

Tutto questo porta a conseguenze che in genere rimangono nell'ombra

Episodio 1: Prima primaria

Gaia, di fronte alla scrittura 8=3+5, rimane incerta.
L'insegnante le chiede il perché dell'incertezza.
Gaia risponde che sì, "3 più 5 fa 8 ma non va bene com'è scritta perché i numeri sono scambiati".
Invitata a modificarla scrive 3+5=8, ma non sa spiegare perché così va bene.

Perché Gaia non accetta 8=3+5?

Gaia non accetta 8=3+5 perché non capisce come sia possibile il **risultato** a sinistra e l'**operazione** a destra.
È abituata ad operare sulle scritture matematiche, non a ragionare su di esse.
Per lei l'uguale possiede un significato procedurale, con una connotazione spazio-temporale: prepara il finale di una storia che inizia a sinistra con una o più **operazioni** e si conclude a destra con un **risultato**.

Episodio 2: Seconda primaria

L’insegnante chiede a Rita di scrivere 36 meno 24.
L’alunna scrive:

36-24**=**

Si interrompe e chiede “Devo trovare quanto fa?”
L’insegnante la guarda senza rispondere.
Rita aggiunge il risultato dopo l’uguale:

36-24=**12**.

Perché Rita scrive ‘=‘ e ‘12’?

Episodio 2: Seconda primaria

Rita esprime un disorientamento analogo a quello di Gaia: 36-24 per lei è un'operazione, cioè una scrittura 'in attesa'. Incompleta.
Inserisce il simbolo '=' per preparare il risultato, perché la scrittura 36-24, da sola, non ha una 'dignità ontologica', è qualcosa di provvisorio (Rita sa che, prima o poi, le verrà chiesto 'quanto fa').
Dei ricercatori l'hanno chiamata sindrome da mancanza di risultato.

Una storia senza finale

Un commento agli episodi 1 e 2

Gli atteggiamenti di Gaia e Rita mostrano i depositi di ciò che resta, nel profondo, delle conoscenze matematiche acquisite, legate soprattutto al fare e al calcolare.

Gli alunni sono abituati ad operare sulle scritture matematiche, non ad **interpretarle**, a **riflettere** sul loro significato, ad **argomentare** su di esse.

Il progetto ArAl si propone di far maturare queste competenze, a livello metacognitivo e metalinguistico.

Aritmetica del 'far di conto'

Operazione — 3+5=8 — Risultato

Sono cose diverse

L'uguale è un operatore direzionale

Ha un significato spazio-temporale

E' l'indicatore che 3 più 5 fa 8

Ha un significato **procedurale**

Ma nei rami alti, in algebra, cosa succede?

Aritmetica del 'far di conto'

Operazione — 3+5=8 — Risultato

Sono cose diverse

1. L'uguale operatore direzionale
2. significato spazio-temporale
3. Indicatore che 3 più 5 fa 8
4. Significato **procedurale**

Episodio 3: Terza secondaria di primo grado

Leo incontra scritture come:

$$15+2x=6x-21.$$

Impara a risolverle ma non sa cosa significhino. Si sente più a suo agio con un solo numero dopo l'uguale come in:

$$7\times(9-x)=14$$

perché 14 gli è più familiare, somiglia ad un risultato.

Se la scrittura invece è:

$$14=7\times(9-x)$$

i suoi dubbi tornano.

Episodio 3: Terza secondaria di primo grado

Leo incontra scritture come:

$$15+2x=6x-21.$$

Impara a risolverle ma non sa cosa significhino. Si sente più a suo agio con

Anche Leo è condizionato da una concezione **procedurale** dell'uguale.
Si sta muovendo ('a sua insaputa') in un universo concettuale algebrico del tutto differente da quello aritmetico nel quale si è formato.

i suoi dubbi tornano.

L’uguale: significato procedurale vs relazionale

In algebra

15+2x=6x-21

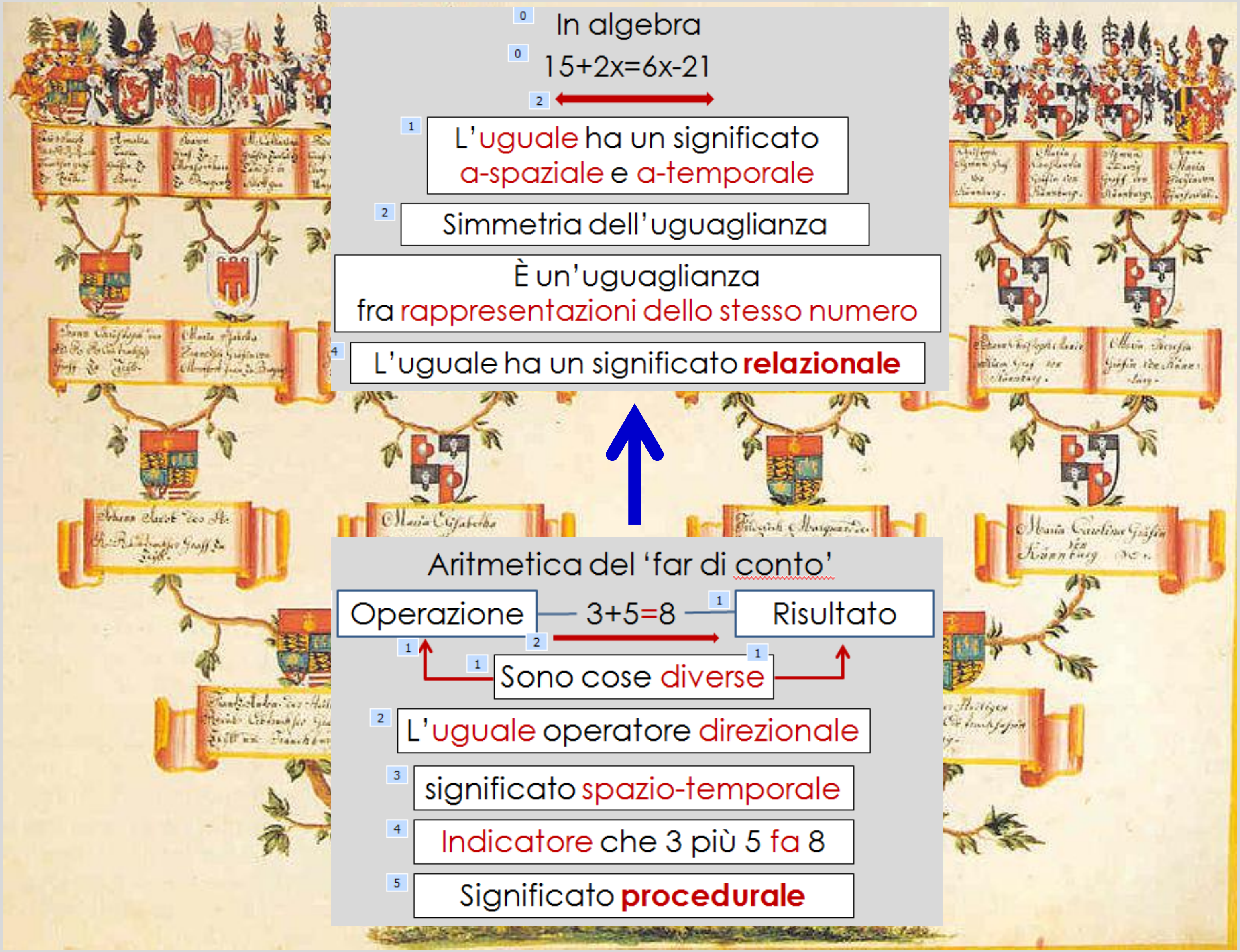
L’uguale ha un significato a-spaziale e a-temporale

Simmetria dell’uguaglianza

È un’uguaglianza fra rappresentazioni dello stesso numero

L’uguale ha un significato **relazionale**

Dall'aritmetica all'algebra



In algebra

$15+2x=6x-21$

L'uguale ha un significato a-spaziale e a-temporale

Simmetria dell'uguaglianza

È un'uguaglianza fra rappresentazioni dello stesso numero

L'uguale ha un significato **relazionale**

Aritmetica del 'far di conto'

Operazione — $3+5=8$ — Risultato

Sono cose diverse

L'uguale operatore direzionale

significato spazio-temporale

Indicatore che 3 più 5 fa 8

Significato **procedurale**

L’albero genealogico

Un cambiamento di prospettiva

numero

Cos'**è** $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Elio	12
Figlio di Flavio	$6+6$
Nipote di Emma	$15+0-3$
Fratello di Lina	$24:2$
Alunno della…	$3 \times 1 \times 4$
Abitante in via…	$36/3$
Padrone di Kira	$2^2 \times 3$
Amico del cuore…	$\sqrt{144}$
…	…
	$[(11+7):9]^2 \times 3$

Rappresentazione canonica e non canonica

Cos'**è** $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Forma canonica

Prodotto

Opaco

Forme non canoniche di 12

Processo

Trasparente

12

$6+6$

$15+0-3$

$24:2$

$3 \times 1 \times 4$

$36/3$

$2^2 \times 3$

$\sqrt{144}$

…

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Rappresentazione canonica e non canonica

Cos'**è** $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Un numero può essere espresso in infiniti modi. Ognuno ha un senso in relazione al contesto e al **processo** soggiacente.

12

6+6

15+0-3

24:2

$3 \times 1 \times 4$

36/3

$2^2 \times 3$

$\sqrt{144}$

...

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Rappresentazione canonica e non canonica

Cos'**è** $[(11+7):9]^2 \times 3$?

L'uguale acquista il significato **relazionale** di equivalenza fra due quantità, ad es:

$36/3=[(11+7):9]^2 \times 3$

12

$6+6$

$15+0-3$

$24:2$

$3 \times 1 \times 4$

$36/3$

$2^2 \times 3$

$\sqrt{144}$

…

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Rappresentazione canonica e non canonica

Cos'**è** $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Saper produrre e interpretare queste forme costruisce la base per comprendere il significato di scritture come ab, $k/3$, x^2y, $(a+b)^2$, a^3-b^3, $(3-b^3)(5a+4b)$, …

12

6+6

15+0-3

24:2

$3 \times 1 \times 4$

36/3

$2^2 \times 3$

$\sqrt{144}$

…

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Competenze necessarie a tradurre ‘successivo di r’

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r → r+r

Le ragioni di questa difficoltà sono **nodali**.
Gli studenti sono abituati alla logica del fare.
Sono molto meno educati a riflettere sul significato delle scritture, siano esse in linguaggio naturale che matematico.
Non sono quindi abituati a concepire due frasi come traduzioni l’una dell’altra.

Competenze necessarie a tradurre 'successivo di r'

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r → r+r

Per fare questo, dovrebbero essere guidati, sin dalla prima primaria, a vedere nella matematica un nuovo linguaggio, dotato – come qualsiasi linguaggio - di una semantica e una sintassi.
Un linguaggio per comunicare, e attraverso il quale costruire e interpretare frasi, e produrre parafrasi sia in linguaggio naturale che matematico.

Competenze necessarie a tradurre ‘successivo di r’

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il $\boxed{\text{successivo di r}}$ → $\boxed{r+r}$

Le parafrasi nel linguaggio naturale sono traghetti verso la loro traduzione in linguaggio matematico (e viceversa).

Per esempio, in questo caso: ‘successivo’.
Gli studenti lo definiscono così:

- “Che viene dopo”;
- “Più grande di un’unità”.
- “Per esempio dopo 24 c’è 25”.

Competenze necessarie a tradurre ‘successivo di r’

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r → r+r

Vanno guidati a formulare parafrasi complete (soggetto, predicato, complemento).

- ‘Il successivo di un numero è il numero che viene dopo’;
- ‘Il successivo di un numero è il numero più grande di una unità’.

La seconda parafrasi avvicina alla traduzione in linguaggio matematico.

Competenze necessarie a tradurre ‘successivo di r’

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r → r+r

Un ulteriore affinamento:

Il successivo di un numero
è il numero stesso più un’unità

↓

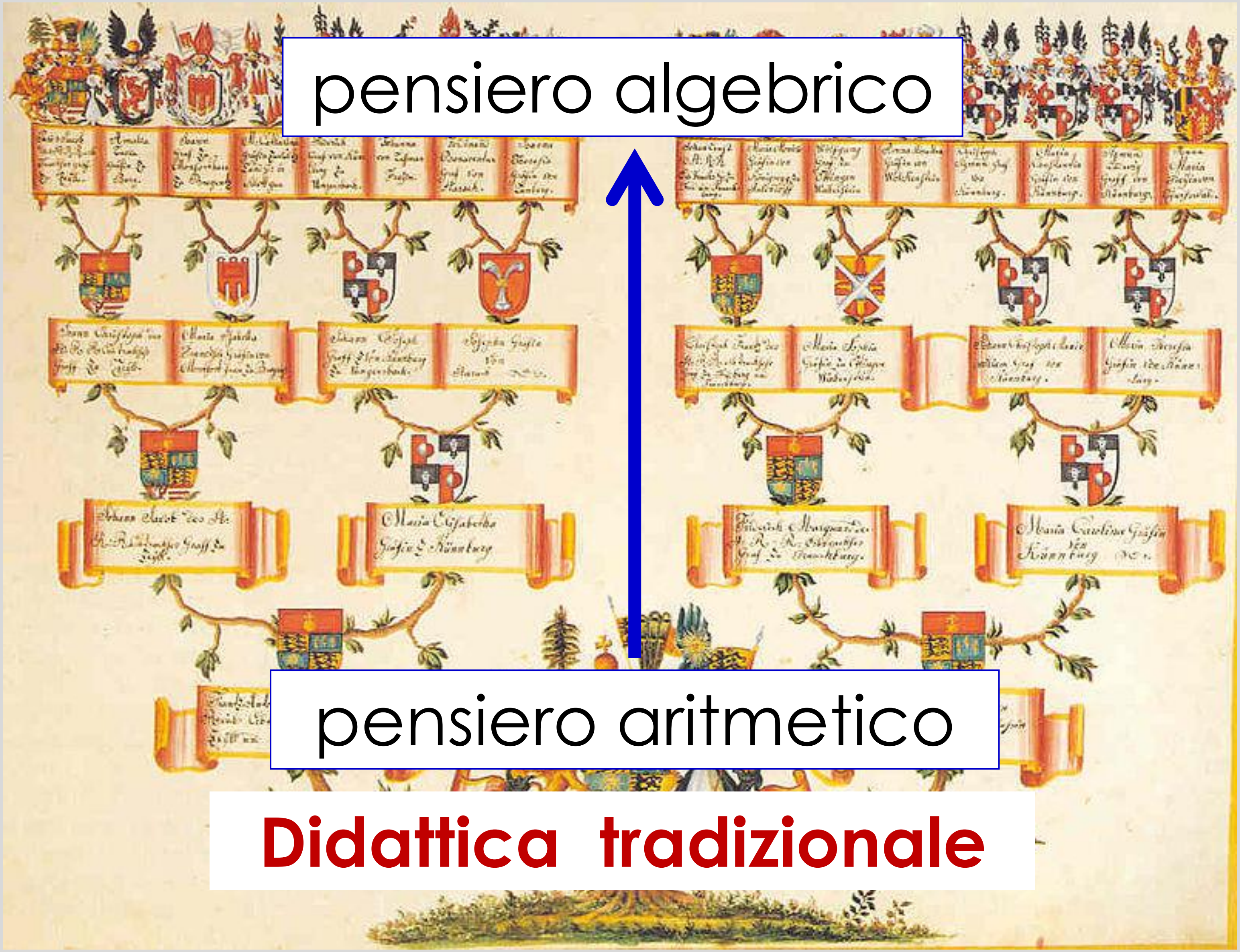
Il successivo di 24 è esprimibile
in forma **non canonica** come

24+1 **25**

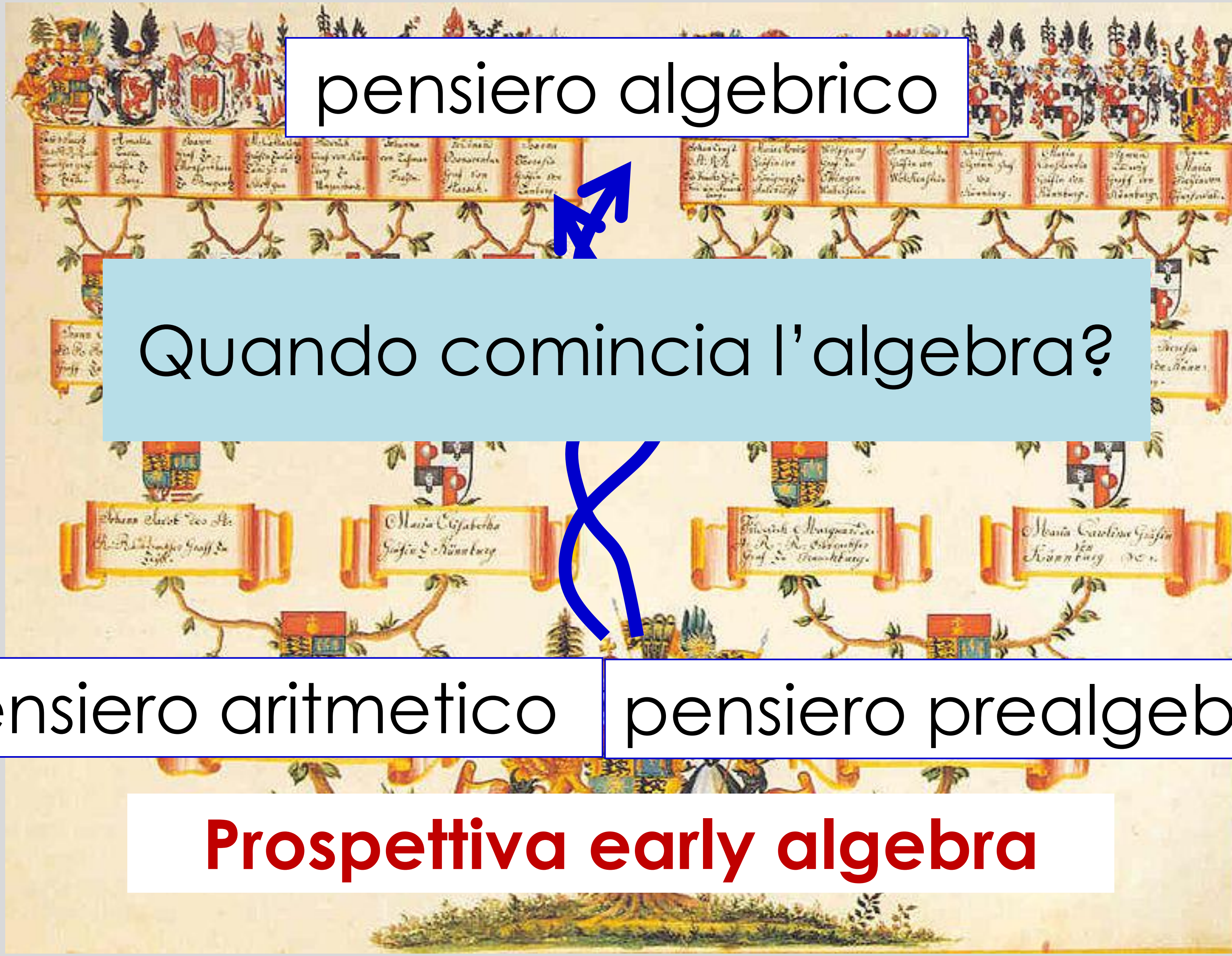
↓ ?

r+1

Due diverse didattiche



Due diverse concezioni



Anna (‘grande’ dell’infanzia) riconosce che due treni che continuano chissà dove oltre la porta della stanza - uno formato da vagoni contenenti due duplo gialli e uno rosso e uno formato da vagoni contenenti due noci e un arachide – “sono quasi uguali”.

Anna sta facendo dell’algebra?

Di fatto gioca con **l’analogia strutturale**

Quando 'comincia' l'algebra? (Episodio 5)

Federica (seconda primaria) trova sul suo sussidiario la scrittura '$3\times\square=27$' e scrive '$3\times\boxed{9}=27$'. L'insegnante le dice brava perché Federica mostra di conoscere le tabelline.

Federica sta facendo dell'algebra?

Di fatto ha risolto un'**equazione** di primo grado ad una incognita

Quando ‘comincia’ l’algebra? (Episodio 6)

Piero (terza primaria) osserva che “È giusto dire che 5 più 6 fa 11, ma non si può dire che 11 ‘fa’ 5 più 6, e allora è meglio dire che 5 più 6 ‘è uguale’ a 11, perché in questo caso è vero anche il contrario”.

Piero sta facendo dell’algebra?

Di fatto sta argomentando sul **significato relazionale dell’uguale**

La classe (terza primaria) analizza la rappresentazione in linguaggio matematico di un problema elaborata da Katia:

$$\square\square+3=27.$$

Katia: Due quadrati più 3 è uguale a 27.
Denise: Per me non è giusto dire ‘Quadrati’. Non si dice mica ‘Due otti’. Si dice ‘Due otto’. Bisogna dire ‘Due quadrato’.

Denise sta facendo dell’algebra?

Di fatto riflette sul **significato di un simbolo che rappresenta un numero sconosciuto**.

Early Algebra e algebra nel Progetto ArAl

i	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5

Early Algebra e algebra nel Progetto ArAl

i	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5

Riprendiamo un punto lasciato in sospeso

$$[(11+7):9]^2 \times 3$$

Ogni scrittura può essere vista in due modi:

Punto di vista **procedurale**
Eseguire ordinatamente operazioni
Si privilegia l'aspetto **cognitivo**

$11+7$
$18:9$
2^2
4×3
12

Faccio 11 più 7,
poi divido 18 per 9,
poi elevo 2 al quadrato,
poi moltiplico 4 per 3,
trovo il risultato.

Riprendiamo un punto lasciato in sospeso

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Ogni scrittura può essere vista in due modi:

Punto di vista **relazionale**

Interpretare **la struttura** di una frase

Si favorisce il livello **metacognitivo**

$11+7$	**è** una somma
$(11+7):9$	**è** un quoziente
$[(11+7):9]^2$	**è** il quadrato di un quoziente
$[(11+7):9]^2 \times 3$	**è** un prodotto

Riprendiamo un punto lasciato in sospeso

$$[(11+7):9]^2 \times 3$$

Ogni scrittura può essere vista in due modi:

Punto di vista **relazionale**

Interpretare **la struttura** di una frase

Si favorisce il livello **metacognitivo**

Quesiti del test iniziale: tradurre

- Il quadrato di un quoziente moltiplicato per 3;
- Il prodotto fra un quadrato e 3;
- Il triplo del quadrato di un quoziente;
- un multiplo di 3…

Cos'è un oggetto matematico

$\boxed{(a+b)^2}$ ⟷ $\boxed{\text{quadrato di un binomio}}$

a^3-b^3 differenza di due cubi

$(3-b^3)(5a+4b)$ prodotto di due binomi

Uno studente che sia stato abituato solo

Lo studente impara, anche, che $(a+b)^2$ è il quadrato di un binomio e sa pure ripeterlo, se l'insegnante gli chiede come si chiama. Ma da qui a parlare di competenza ci corre. Un altro episodio.

Lara ha imparato che a^2-b^2 è 'la differenza fra due quadrati'.
In un'altra occasione l'insegnante le chiede

"Cos'è 5^2-3^2?"

dopo un po' Lara risponde **16**.
Non si sogna di dire "È la differenza fra il quadrato di 5 e il quadrato di 3".

Un esempio molto diverso

Esempio 8: Quarta primaria

I: Traducete 3×b×h in linguaggio naturale.
Le traduzioni vengono trascritte alla LIM.
L'attenzione si concentra su due frasi:

(Lorenzo) Moltiplico 3 per un numero sconosciuto, poi lo moltiplico per un altro numero sconosciuto.
(Anna) È il triplo del prodotto di due numeri sconosciuti.

Segue la discussione.
Lorenzo: Anna ha spiegato che cosa è 3×b×h, io ho detto quello che fai.

Esempio 8: Quarta primaria

I: Traducete $3 \times b \times h$ in linguaggio naturale.

Lorenzo valuta le due traduzioni che si riferiscono alla dualità procedurale / relazionale e si corregge.

Riconosce nella sua frase il punto di vista procedurale e in quella di Rita quello relazionale.

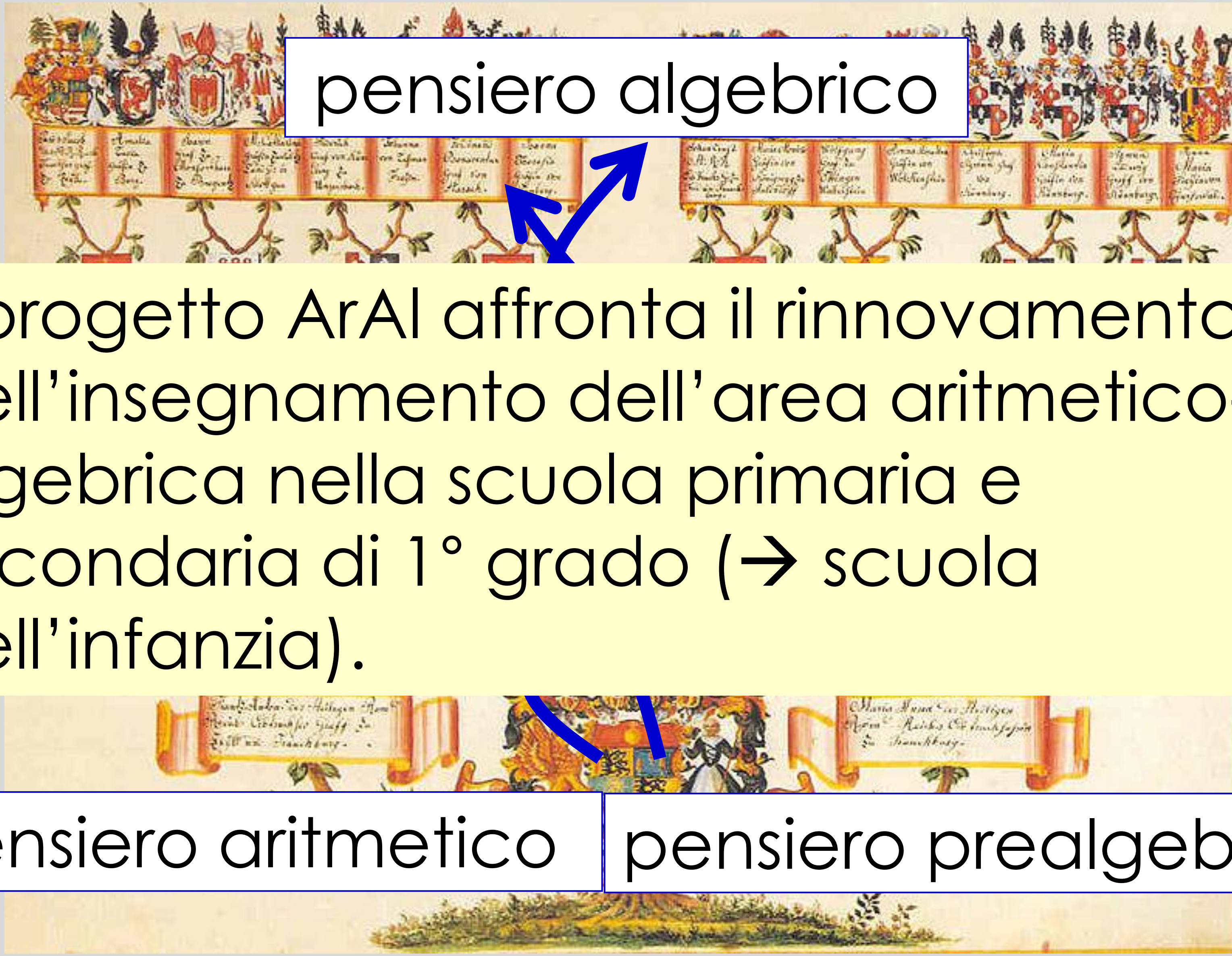
Il suo controllo metacognitivo può essere visto come un risultato del tipo di insegnamento ricevuto, costruito in una prospettiva prealgebrica.

Il balbettio algebrico

Gaia: $8=3+5$ non va bene com'è scritta

Questi aspetti fanno da base all'evoluzione di quello che chiamiamo balbettio algebrico: processo attraverso il quale, in analogia con quanto avviene per il linguaggio naturale, il controllo sul linguaggio matematico matura grazie all'esplorazione di ambienti costruiti opportunamente e ad un contratto didattico indulgente verso momenti iniziali sintatticamente confusi.

La prospettiva del progetto ArAl

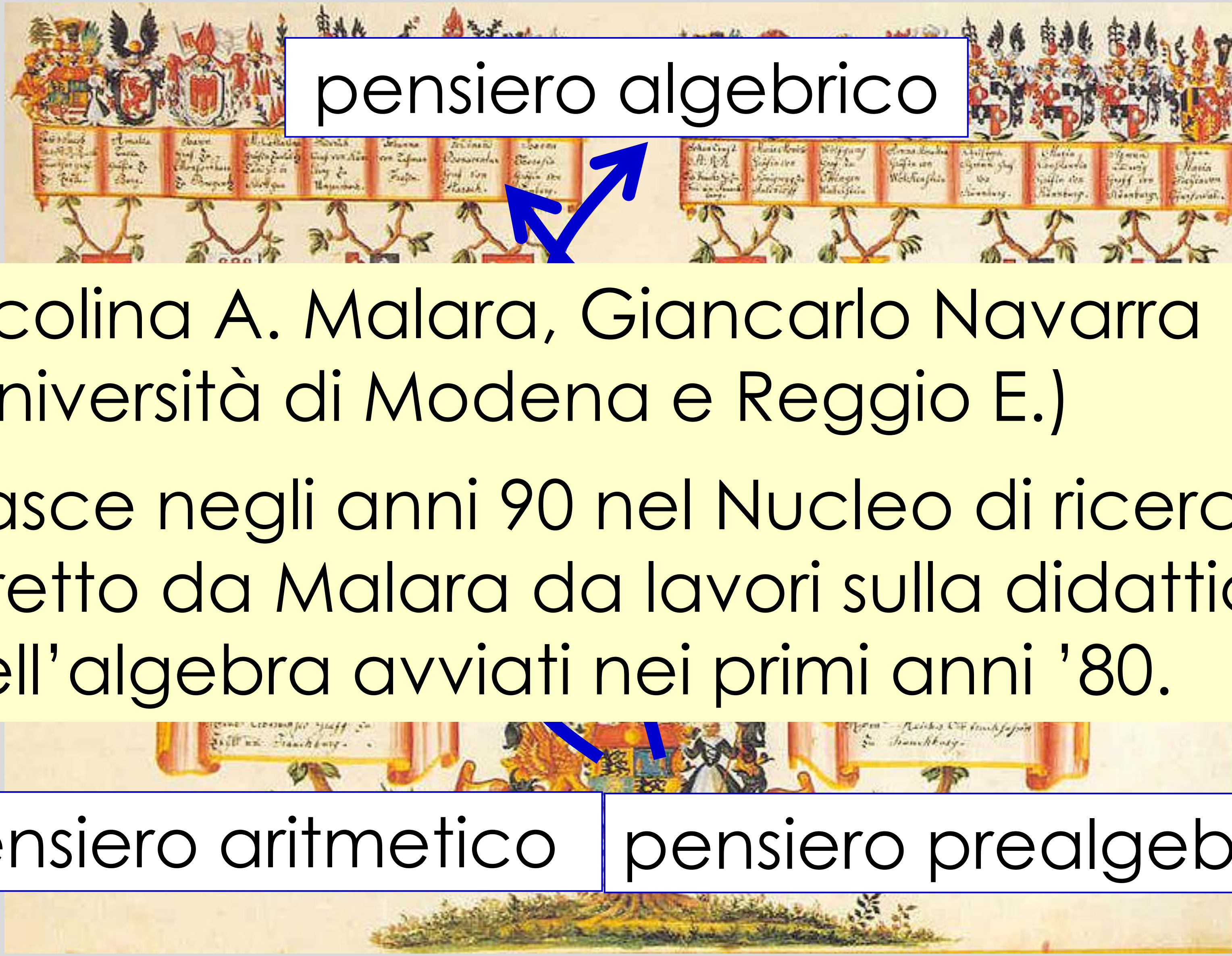


pensiero algebrico

Il progetto ArAl affronta il rinnovamento dell'insegnamento dell'area aritmetico-algebrica nella scuola primaria e secondaria di 1° grado (→ scuola dell'infanzia).

pensiero aritmetico

pensiero prealgebrico



pensiero algebrico

Nicolina A. Malara, Giancarlo Navarra (Università di Modena e Reggio E.)

Nasce negli anni 90 nel Nucleo di ricerca diretto da Malara da lavori sulla didattica dell'algebra avviati nei primi anni '80.

pensiero aritmetico

pensiero prealgebrico

La prospettiva del progetto ArAl

Primo posto al concorso SeT (2001).

Collaborazioni con istituti e reti di scuole.

Collaborazioni ArAl

- Attualmente siamo presenti in:
  - Venezia Giulia: Trieste, Muggia
  - Veneto: Belluno, Eraclea, Jesolo (VE)
  - Emilia Romagna: Bagnacavallo, Conselice, Faenza, Lugo (RA), Modena
  - Piemonte: Mondovì (CN), Nichelino (TO)
  - Liguria: Castelnuovo Magra (SP)
  - Toscana: Firenze, Siena
- Gruppo Progetto ArAl in FB (1800 iscritti)
- www.progettoaral.it
- Collana ArAl (Pitagora Editrice Bologna)

Vi ringrazio per la vostra attenzione