



percorsi nell'aritmetica
per favorire il pensiero prealgebrico

progetto **ArAl**

Early Algebra: un approccio innovativo per la didattica dell'aritmetica e dell'algebra

Giancarlo Navarra

Rozzano - 17 gennaio 2019

Da un test d'ingresso alla scuola secondaria di 2° grado

Traduci in linguaggio matematico:

- Togli 3 dal quadruplo di 15 $\rightarrow 15 \times 4 - 3$
- Togli t dal quadruplo di s $\rightarrow t - s^2$
- Scrivi il successivo di r $\rightarrow r + r$

Gli studenti, per tradurre una frase, dovrebbero saperla interpretare, cioè attribuire un significato alla sua struttura e ai suoi termini e organizzare su di essi una riflessione.

Da un test d'ingresso alla scuola secondaria di 2° grado

Traduci in lingua italiana:

$$(a) \frac{1}{2} \cdot a \quad (b) \frac{a}{2} \quad (c) a : 2$$

Vengono percepite in modi diversi:

(a) come **moltiplicazione**:

- “Moltiplica per un numero la metà di 1”.

(b) e (c) come **divisioni**:

- (b) “Divido a per 2 in frazione”
- (c) “**Fai** la metà di a”

Sono tutte definizioni **procedurali**.

Si riferiscono al ‘cosa **fare**’

Da un test d'ingresso alla scuola secondaria di 2° grado

Traduci in lingua italiana:

$$(a) \frac{1}{2} \cdot a$$

$$(b) \frac{a}{2}$$

$$(c) a : 2$$

Nessuno le definisce, ad esempio, come:

- (a) **Prodotto** fra $\frac{1}{2}$ e a
- (b) **Rapporto** fra a e 2
- (c) **Quoziente** fra a e 2

Definizioni **relazionali**

Esprimono cos'è ognuna di queste scritte

Le ragioni di questa difficoltà sono **nodali**.

Vi torneremo fra poco.

Da un test d'ingresso alla scuola secondaria di 2° grado

Traduci in lingua italiana:

$$(a) \frac{1}{2} \cdot a$$

$$(b) \frac{a}{2}$$

$$(c) a : 2$$

Nessuno le definisce, ad esempio, come:

- (a) **Prodotto** fra $\frac{1}{2}$ e a
- (b) **Rapporto** fra a e 2
- (c) **Quoziente** fra a e 2

Definizioni **relazionali**

Esprimono cos'è ognuna di queste scritte

Le ragioni di questa difficoltà sono **nodali**.

Vi torneremo fra poco.

Un albero genealogico

$$\frac{1}{2} \cdot a$$

$$\frac{a}{2}$$

Togli 3 dal quadruplo di 15

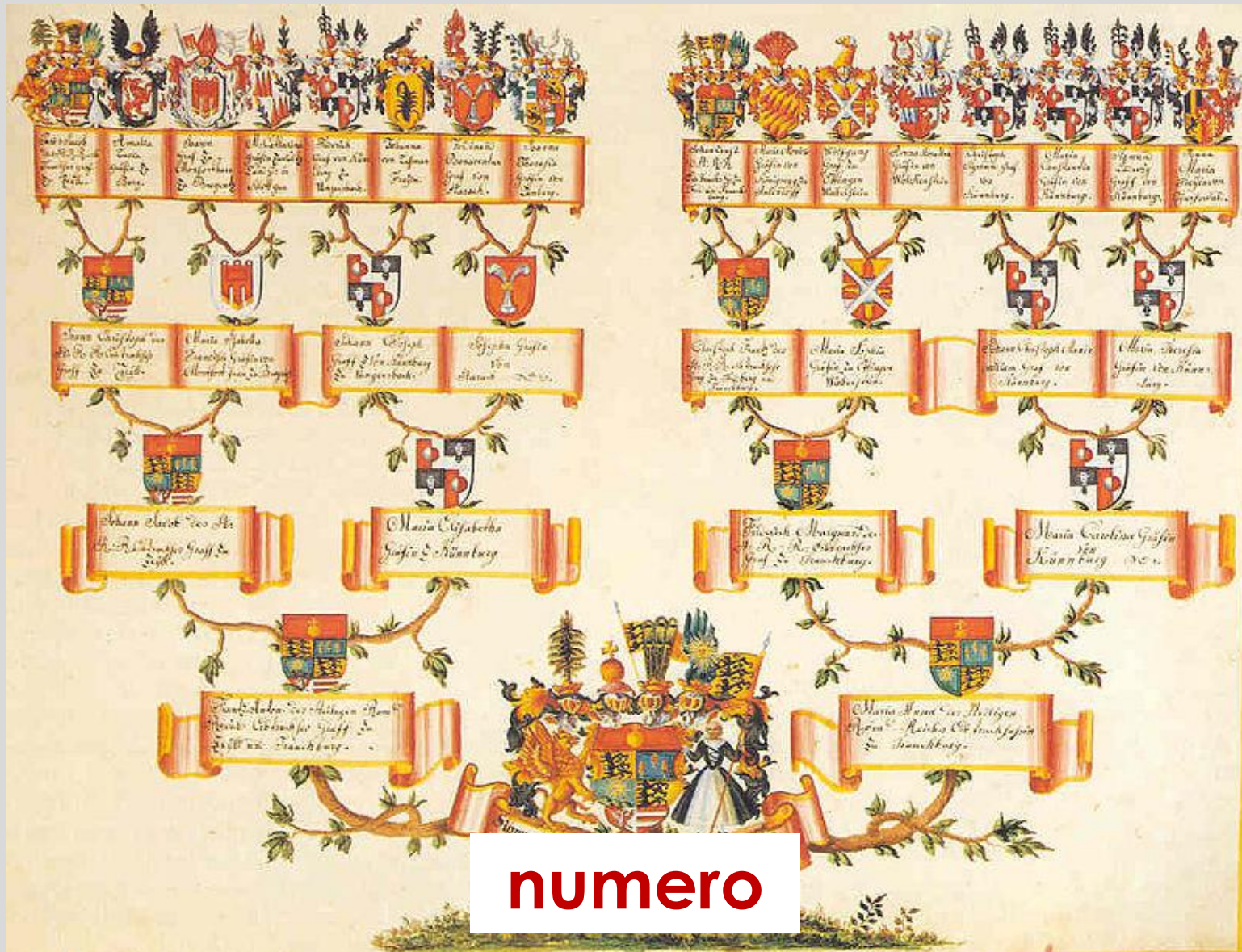
Togli t dal quadruplo di s

Scrivi il successivo di z

$$a : 2$$



Un albero genealogico



Le radici dell'albero

Pensate a tre numeri

Quanti di voi hanno pensato ad esempio:

$$\sqrt{6} \quad -13 \quad \frac{7}{5} \quad 0,28 \quad 9^2 \quad (4+6) \times 3$$

L'imprinting del numero naturale

Vorrei farvi riflettere sulle vostre conoscenze

E ora un'altra questione

Le radici dell'albero

Cos'è $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Sono delle operazioni

Sono calcoli

È un'espressione da risolvere

Devo trovare quanto fa

Bisogna trovare il risultato

Prima si trova la somma, poi si divide...

L'imprinting del fare.

Un albero genealogico



Tutto questo porta a conseguenze che in genere rimangono nell'ombra

Episodio 1: Prima primaria

Gaia, di fronte alla scrittura $8=3+5$, rimane incerta.

L'insegnante le chiede il perché dell'incertezza.

Gaia risponde che sì, “3 più 5 fa 8 ma non va bene com'è scritta perché i numeri sono scambiati”.

Invitata a modificarla scrive $3+5=8$, ma non sa spiegare perché così va bene.

Perché Gaia non accetta $8=3+5$?

Episodio 1: Prima primaria

Gaia non accetta $8=3+5$ perché non capisce come sia possibile **il risultato a sinistra e l'operazione a destra.**

È abituata ad **operare** sulle scritte matematiche, non a ragionare su di esse. Per lei l'uguale possiede un **significato procedurale**, con una connotazione **spazio-temporale**: prepara il finale di una storia che inizia **a sinistra** con una o più **operazioni** e si conclude **a destra** con un **risultato.**

Episodio 2: Seconda primaria

L'insegnante chiede a Rita di scrivere 36 meno 24.

L'alunna scrive:

$$36-24=$$

Si interrompe e chiede "Devo trovare quanto fa?"

L'insegnante la guarda senza rispondere. Rita aggiunge il risultato dopo l'uguale:

$$36-24=\mathbf{12}.$$

Perché Rita scrive '=' e '12'?

Episodio 2: Seconda primaria

Rita esprime un disorientamento analogo a quello di Gaia: 36-24 per lei è un'operazione, cioè una scrittura 'in attesa'. Incompleta.

Inserisce il simbolo '=' per preparare il risultato, perché la scrittura 36-24, da sola, non ha una 'dignità ontologica', è qualcosa di provvisorio (Rita sa che, prima o poi, le verrà chiesto 'quanto fa'). Dei ricercatori l'hanno chiamata **sindrome da mancanza di risultato**.

Una storia senza finale



Un commento agli episodi 1 e 2

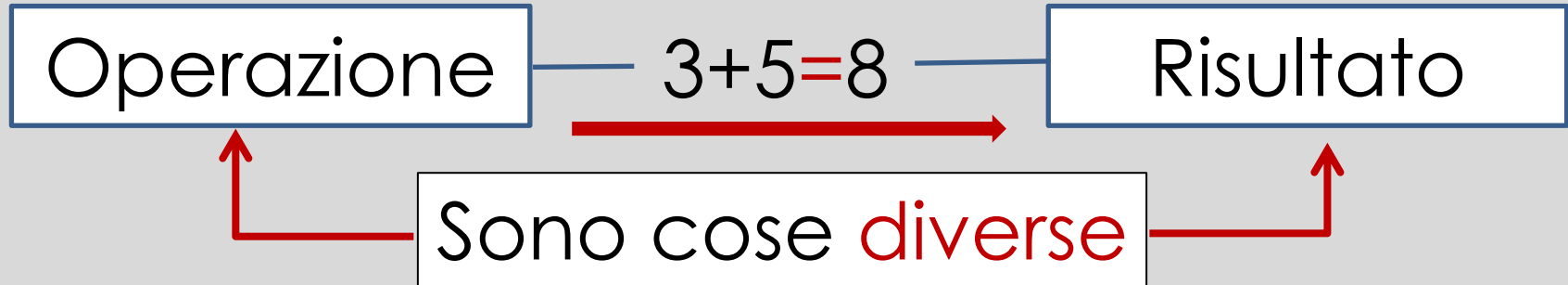
Gli atteggiamenti di Gaia e Rita mostrano i depositi di ciò che resta, nel profondo, delle conoscenze matematiche acquisite, legate soprattutto al **fare** e al **calcolare**.

Gli alunni sono abituati ad **operare** sulle scritture matematiche, non ad **interpretarle**, a **riflettere** sul loro **significato**, ad **argomentare** su di esse.

Il progetto ArAl si propone di far maturare queste competenze, a livello **metacognitivo** e **metalinguistico**.

Le radici dell'albero

Aritmetica del 'far di conto'



L'**uguale** è un operatore **direzionale**

Ha un significato **spazio-temporale**

E' l'**indicatore** che 3 più 5 fa 8

Ha un significato **procedurale**

Salendo dalle radici

Ma nei rami alti, in algebra,
cosa succede?

Aritmetica del 'far di conto'

Operazione — $3+5=8$ — Risultato

1 1 2 1
Sono cose diverse

2 L'uguale operatore direzionale

3 significato spazio-temporale

4 Indicatore che 3 più 5 fa 8

5 Significato procedurale

Episodio 3: Terza secondaria di primo grado

Leo incontra scritte come:

$$15+2x=6x-21.$$

Impara a **risolverle** ma non sa **cosa significhino**. Si sente più a suo agio con un solo numero dopo l'uguale come in:

$$7 \times (9-x) = 14$$

perché 14 gli è più familiare, **somiglia ad un risultato**.

Se la scrittura invece è:

$$14 = 7 \times (9-x)$$

i suoi dubbi tornano.

Episodio 3: Terza secondaria di primo grado

Leo incontra scritture come:

$$15+2x=6x-21.$$

Impara a **risolverle** ma non sa **cosa significhino**. Si sente più a suo agio con

Anche Leo è condizionato da una **concezione procedurale dell'uguale**.

Si sta muovendo ('a sua insaputa') in un universo concettuale algebrico del tutto differente da quello aritmetico nel quale si è formato.

i suoi dubbi tornano.

L'uguale: significato procedurale vs relazionale

In algebra

$$15+2x=6x-21$$



L'uguale ha un significato
a-spaziale e a-temporale

Simmetria dell'uguaglianza

È un'uguaglianza
fra rappresentazioni dello stesso numero

L'uguale ha un significato **relazionale**

Dall'aritmetica all'algebra

⁰ In algebra
⁰ $15+2x=6x-21$
² ←→

¹ L'uguale ha un significato **a-spaziale** e **a-temporale**

² Simmetria dell'uguaglianza

È un'uguaglianza fra **rappresentazioni dello stesso numero**

⁴ L'uguale ha un significato **relazionale**

↑

Aritmetica del 'far di conto'

Operazione — $3+5=8$ — ¹ Risultato

¹ ↑ ² ←→ ¹ ↑

Sono cose **diverse**

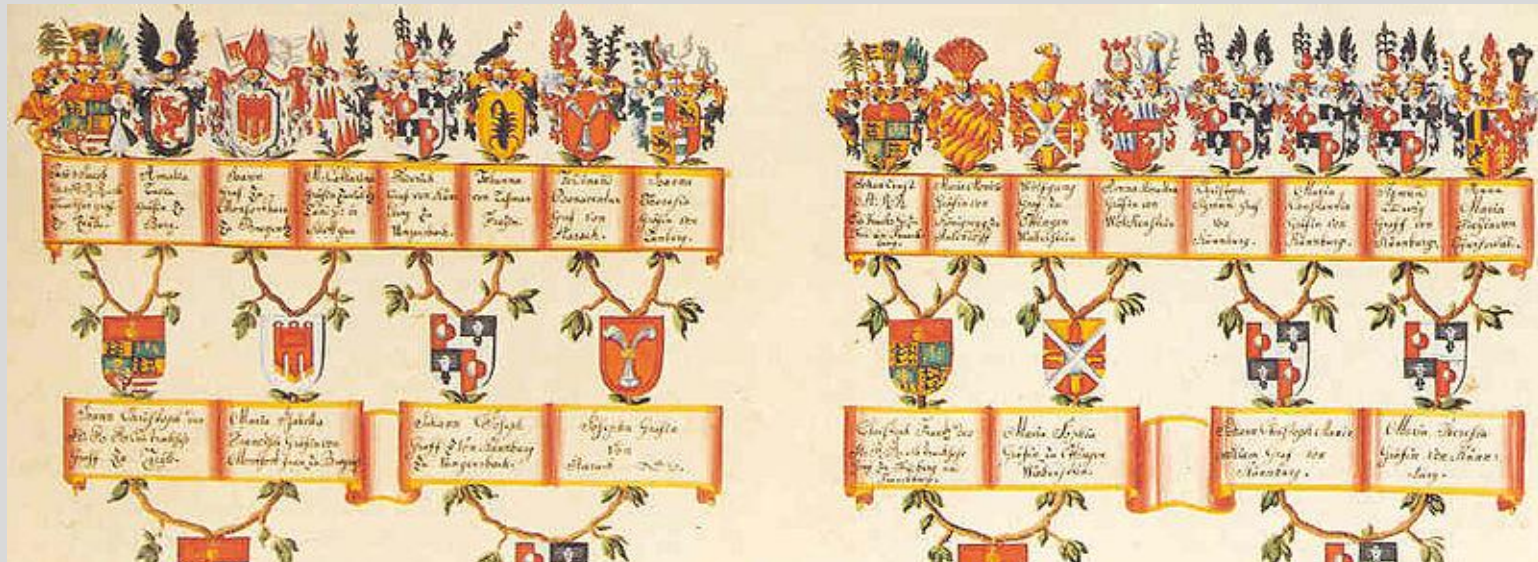
² L'uguale operatore **direzionale**

³ significato **spazio-temporale**

⁴ **Indicatore** che 3 più 5 fa 8

⁵ Significato **procedurale**

L'albero genealogico



Un cambiamento di prospettiva



Le radici dell'albero

Cos'è $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Elio

Figlio di Flavio

Nipote di Emma

Fratello di Lina

Alunno della...

Abitante in via...

Padrone di Kira

Amico del cuore...

...

12

$6+6$

$15+0-3$

$24:2$

$3 \times 1 \times 4$

$36/3$

$2^2 \times 3$

$\sqrt{144}$

...

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Rappresentazione canonica e non canonica

Cos'è $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Forma canonica

Prodotto

Opaco

**Forme non
canoniche di 12**

Processo

Trasparente

12

6+6

15+0-3

24:2

3×1×4

36/3

2²×3

√144

...

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Rappresentazione canonica e non canonica

Cos'è $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Un numero può essere espresso in infiniti modi.

Ognuno ha un senso in relazione al contesto e al **processo** soggiacente.

12

6+6

15+0-3

24:2

3×1×4

36/3

2²×3

√144

...

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Rappresentazione canonica e non canonica

$$\text{Cos'è } [(11+7):9]^2 \times 3?$$

L'uguale acquista il significato

relazionale di equivalenza fra due quantità, ad

es:

$$36/3 = [(11+7):9]^2 \times 3$$

$$12$$

$$6+6$$

$$15+0-3$$

$$24:2$$

$$3 \times 1 \times 4$$

$$36/3$$

$$2^2 \times 3$$

$$\sqrt{144}$$

...

$$[(11+7):9]^2 \times 3$$

Rappresentazione canonica e non canonica

Cos'è $[(11+7):9]^2 \times 3$?

Saper produrre e interpretare queste forme costruisce la base per comprendere il significato di scritte come ab , $k/3$, x^2y , $(a+b)^2$, $a^3 - b^3$, $(3-b^3)(5a+4b)$, ...

12

$6+6$

$15+0-3$

$24:2$

$3 \times 1 \times 4$

$36/3$

$2^2 \times 3$

$\sqrt{144}$

...

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Competenze necessarie a tradurre 'successivo di r'

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r

→ $r+r$

Le ragioni di questa difficoltà sono **nodali**.
Gli studenti sono abituati alla logica del **fare**.

Sono molto meno educati a **riflettere sul significato delle scritte**, siano esse in linguaggio naturale che matematico.
Non sono quindi abituati a concepire due frasi come **traduzioni** l'una dell'altra.

Competenze necessarie a tradurre 'successivo di r'

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r \rightarrow $r+r$

Per fare questo, dovrebbero essere guidati, sin dalla prima primaria, a vedere nella matematica un **nuovo linguaggio**, dotato – come qualsiasi linguaggio - di una **semantica** e una **sintassi**.

Un linguaggio per **comunicare**, e attraverso il quale costruire e interpretare frasi, e produrre **parafrasi** sia in linguaggio naturale che matematico.

Competenze necessarie a tradurre 'successivo di r'

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r \rightarrow $r+r$

Le parafrasi nel linguaggio naturale sono traghetti verso la loro traduzione in linguaggio matematico (e viceversa).

Per esempio, in questo caso: 'successivo'.
Gli studenti lo definiscono così:

- "Che viene dopo";
- "Più grande di un'unità".
- "Per esempio dopo 24 c'è 25".

Competenze necessarie a tradurre 'successivo di r'

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r $\rightarrow r+r$

Vanno guidati a formulare parafrasi **complete** (soggetto, predicato, complemento).

- 'Il **successivo di un numero** è il numero che viene dopo';
- 'Il **successivo di un numero** è il numero più grande di una unità'.

La seconda parafrasi avvicina alla **traduzione** in linguaggio matematico.

Competenze necessarie a tradurre 'successivo di r'

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r

→ r+r

Un ulteriore affinamento:

Il successivo di un numero
è il numero stesso più un'unità



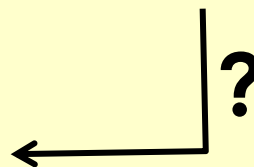
Il successivo di 24 è esprimibile
in forma **non canonica** come

24+1

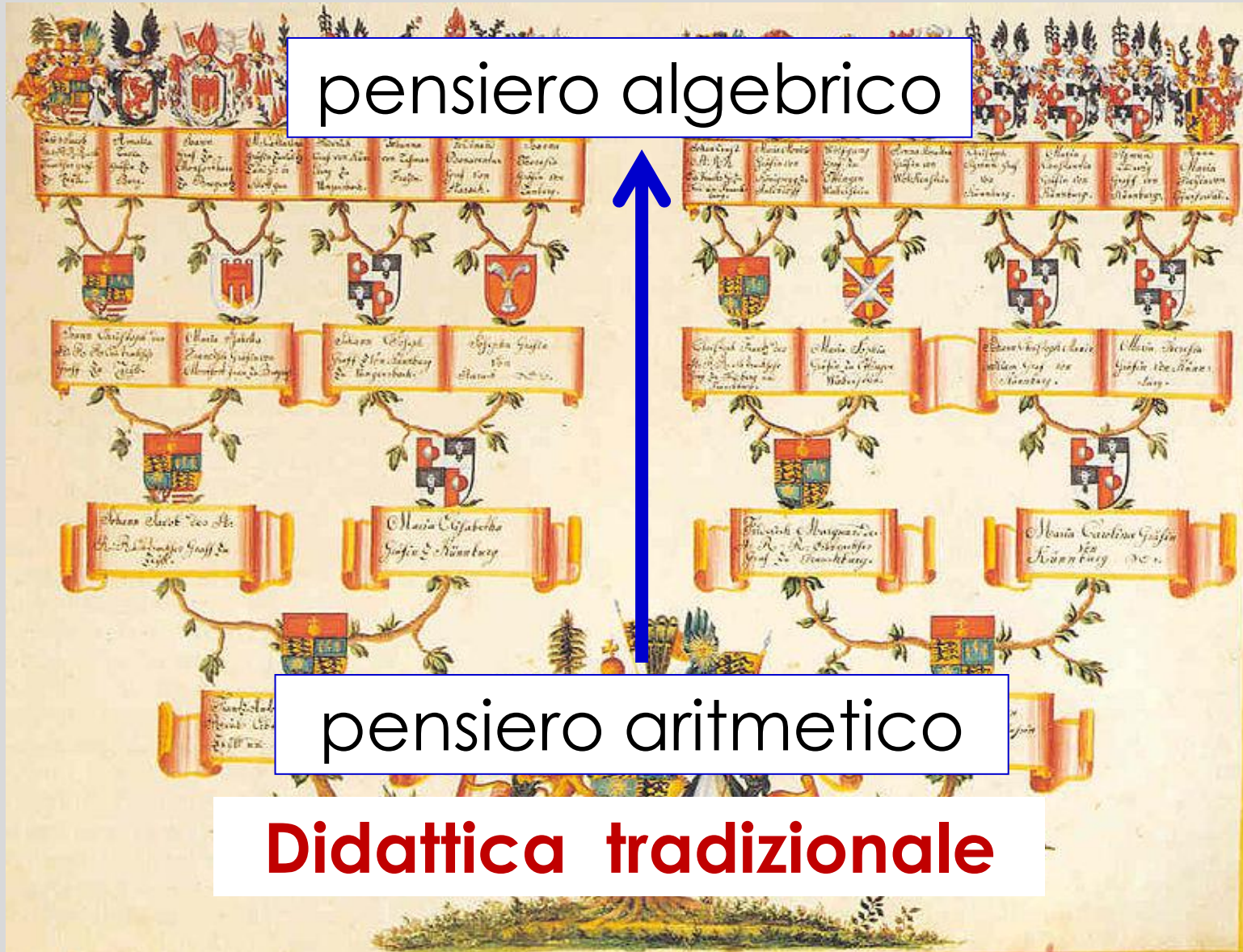
25



r+1



Due diverse didattiche



Due diverse concezioni

pensiero algebrico

Quando comincia l'algebra?

pensiero aritmetico

pensiero prealgebrico

Prospettiva early algebra

Quando 'comincia' l'algebra? (Episodio 4)

Anna ('grande' dell'infanzia) riconosce che due treni che continuano chissà dove oltre la porta della stanza - uno formato da vagoni contenenti due duplo gialli e uno rosso e uno formato da vagoni contenenti due noci e un arachide - "sono quasi uguali".



Anna sta facendo dell'algebra?

Di fatto **gioca con l'analogia strutturale**

Quando 'comincia' l'algebra? (Episodio 5)

Federica (seconda primaria) trova sul suo sussidiario la scrittura ' $3 \times \square = 27$ ' e scrive ' $3 \times \boxed{9} = 27$ '. L'insegnante le dice brava perché Federica mostra di conoscere le tabelline.

Federica sta facendo dell'algebra?

Di fatto ha risolto un' **equazione** di primo grado ad una incognita

Quando 'comincia' l'algebra? (Episodio 6)

Piero (terza primaria) osserva che “È giusto dire che 5 più 6 fa 11, ma non si può dire che 11 ‘fa’ 5 più 6, e allora è meglio dire che 5 più 6 ‘è uguale’ a 11, perché in questo caso è vero anche il contrario”.

Piero sta facendo dell'algebra?

Di fatto **sta argomentando sul significato relazionale dell'uguale**

Quando 'comincia' l'algebra? (Episodio 7)

La classe (terza primaria) analizza la rappresentazione in linguaggio matematico di un problema elaborata da Katia:

$$\square\square+3=27.$$

Katia: Due quadrati più 3 è uguale a 27.

Denise: Per me non è giusto dire 'Quadrati'. Non si dice mica 'Due otti'. Si dice 'Due otto'. Bisogna dire 'Due quadrato'.

Denise sta facendo dell'algebra?

Di fatto **riflette sul significato di un simbolo che rappresenta un numero sconosciuto.**

Early Algebra e algebra nel Progetto ArAl

i	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Early Algebra e algebra nel Progetto ArAl

i	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Riprendiamo un punto lasciato in sospeso

$$[(11+7):9]^2 \times 3$$

Ogni scrittura può essere vista in due modi:

Punto di vista **procedurale**

Eseguire ordinatamente operazioni

Si privilegia l'aspetto **cognitivo**

$$11+7$$

$$18:9$$

$$2^2$$

$$4 \times 3$$

$$12$$

Faccio 11 più 7,
poi divido 18 per 9,
poi elevo 2 al quadrato,
poi moltiplico 4 per 3,
trovo il risultato.

Riprendiamo un punto lasciato in sospeso

$$[(11+7):9]^2 \times 3$$

Ogni scrittura può essere vista in due modi:

Punto di vista **relazionale**

Interpretare **la struttura** di una frase

Si favorisce il livello **metacognitivo**

$$11+7$$

$$(11+7):9$$

$$[(11+7):9]^2$$

$$[(11+7):9]^2 \times 3$$

è una **somma**

è un **quoziente**

è il **quadrato** di un **quoziente**

è un **prodotto**

Riprendiamo un punto lasciato in sospeso

$$[(11+7):9]^2 \times 3$$

Ogni scrittura può essere vista in due modi:

Punto di vista **relazionale**

Interpretare **la struttura** di una frase

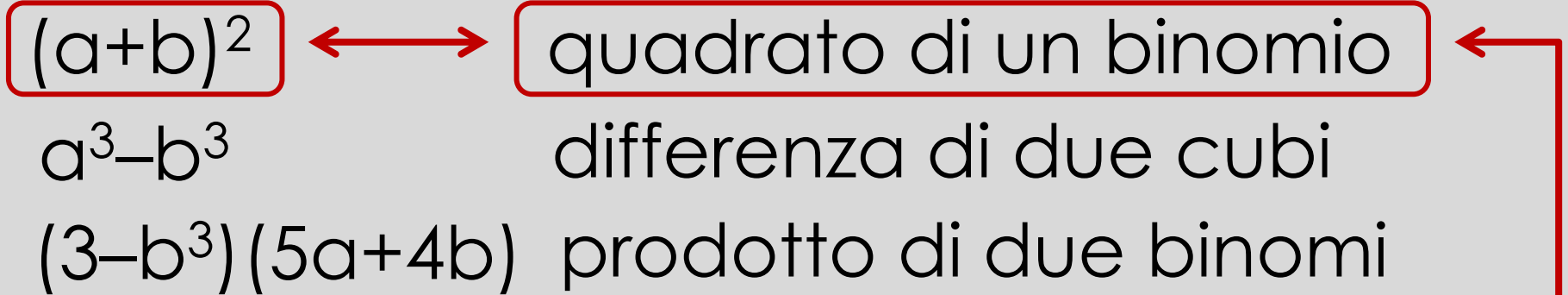
Si favorisce il livello **metacognitivo**

Quesiti del test iniziale: tradurre

- Il **quadrato** di un **quoziente** moltiplicato per 3;
- Il **prodotto** fra un quadrato e 3;
- Il **triplo** del quadrato di un quoziente;
- un **multiplo** di 3...

Nominare un oggetto matematico

Cos'è un oggetto matematico



Uno studente che sia stato abituato solo

Lo studente impara, anche, che $(a+b)^2$ è il quadrato di un binomio e sa pure ripeterlo, se l'insegnante gli chiede come si chiama. Ma da qui a parlare di **competenza** ci corre. Un altro episodio.

Episodio 7: Terza secondaria

Lara ha imparato che a^2-b^2 è 'la differenza fra due quadrati'.

In un'altra occasione l'insegnante le chiede
"Cos'è 5^2-3^2 ?"

dopo un po' Lara risponde **16**.

Non si sogna di dire "È **la differenza** fra il quadrato di 5 e il quadrato di 3".

Un esempio molto diverso

Esempio 8: Quarta primaria

I: Traducete $3 \times b \times h$ in linguaggio naturale.
Le traduzioni vengono trascritte alla LLM.
L'attenzione si concentra su due frasi:

(Lorenzo) Moltiplico 3 per un numero sconosciuto, poi lo moltiplico per un altro numero sconosciuto.

(Anna) È il triplo del prodotto di due numeri sconosciuti.

Segue la discussione.

Lorenzo: Anna ha spiegato che **cosa è** $3 \times b \times h$, io ho detto **quello che fai**.

Esempio 8: Quarta primaria

I: Traducete $3 \times b \times h$ in linguaggio naturale.

Lorenzo valuta le due traduzioni che si riferiscono alla dualità **procedurale** / **relazionale** e si corregge.

Riconosce nella sua frase il punto di vista **procedurale** e in quella di Rita quello **relazionale**.

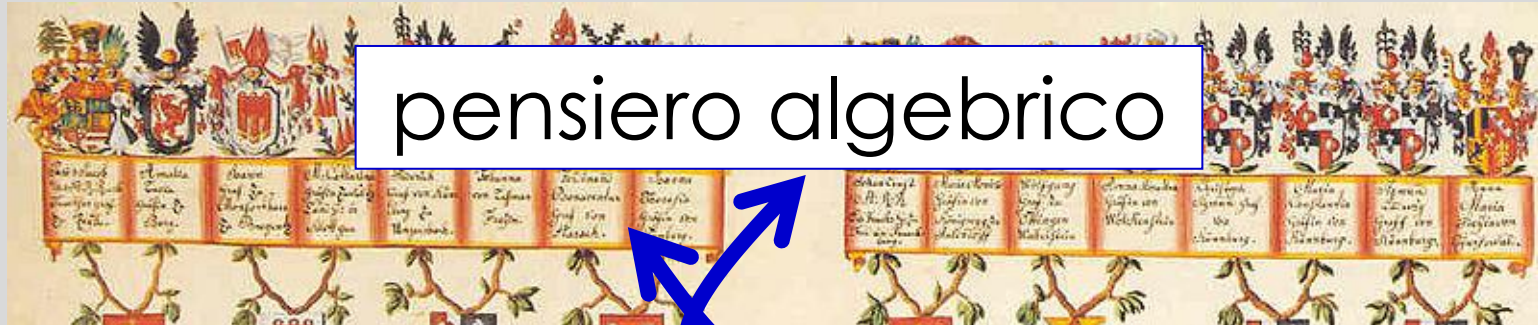
Il suo controllo **metacognitivo** può essere visto come un risultato del tipo di insegnamento ricevuto, costruito in una **prospettiva prealgebrica**.

Il balbettio algebrico

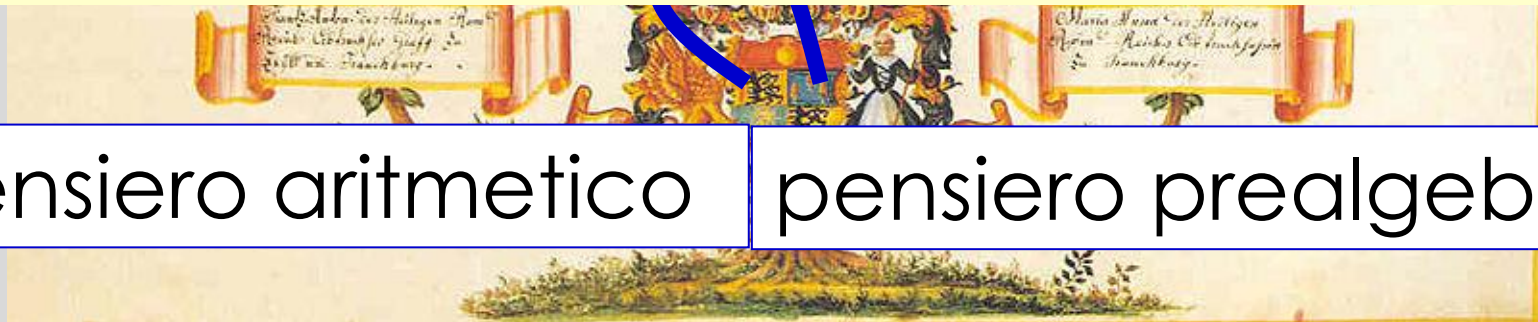
Gaia: $8=3+5$ non va bene com'è scritta

Questi aspetti fanno da base all'evoluzione di quello che chiamiamo **balbettio algebrico**: processo attraverso il quale, **in analogia con quanto avviene per il linguaggio naturale**, il controllo sul linguaggio matematico matura grazie all'esplorazione di ambienti costruiti opportunamente e ad un contratto didattico indulgente verso momenti iniziali sintatticamente confusi.

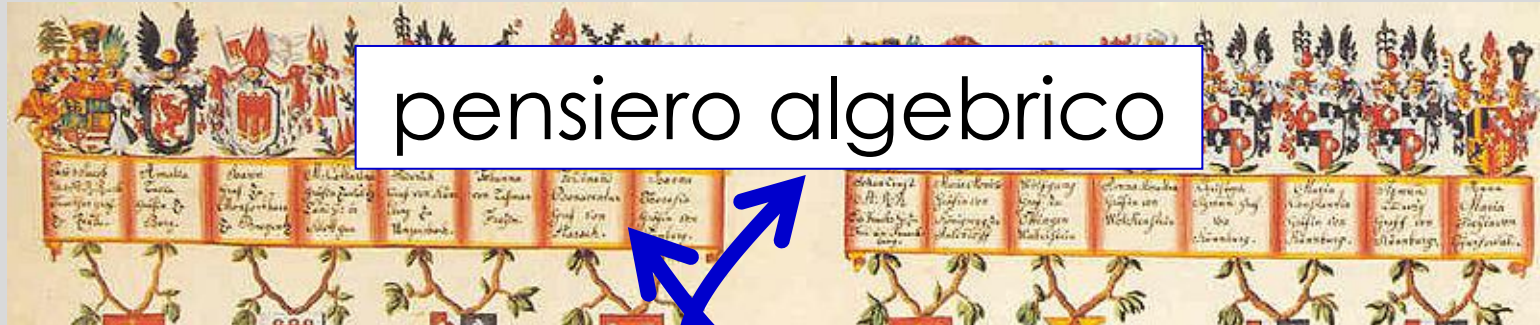
La prospettiva del progetto ArAl



Il progetto ArAl affronta il rinnovamento dell'insegnamento dell'area aritmetico-algebrica nella scuola primaria e secondaria di 1° grado (→ scuola dell'infanzia).



La prospettiva del progetto ArAl

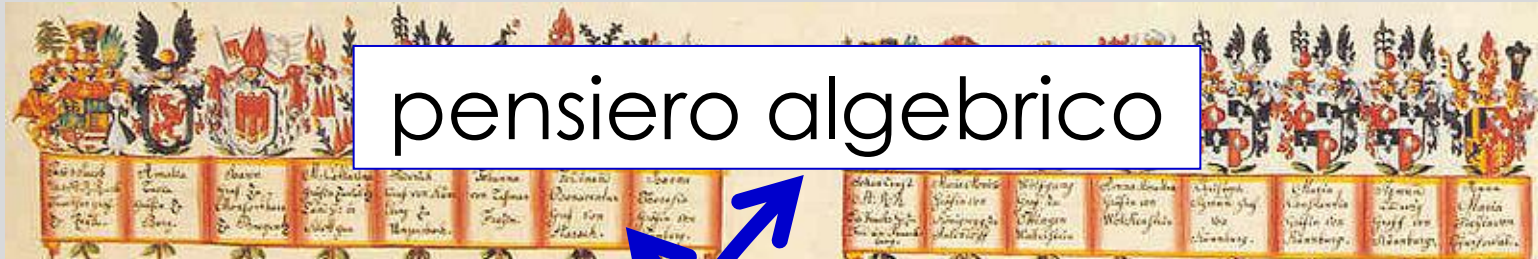


Nicolina A. Malara, Giancarlo Navarra
(Università di Modena e Reggio E.)

Nasce negli anni 90 nel Nucleo di ricerca
diretto da Malara da lavori sulla didattica
dell'algebra avviati nei primi anni '80.

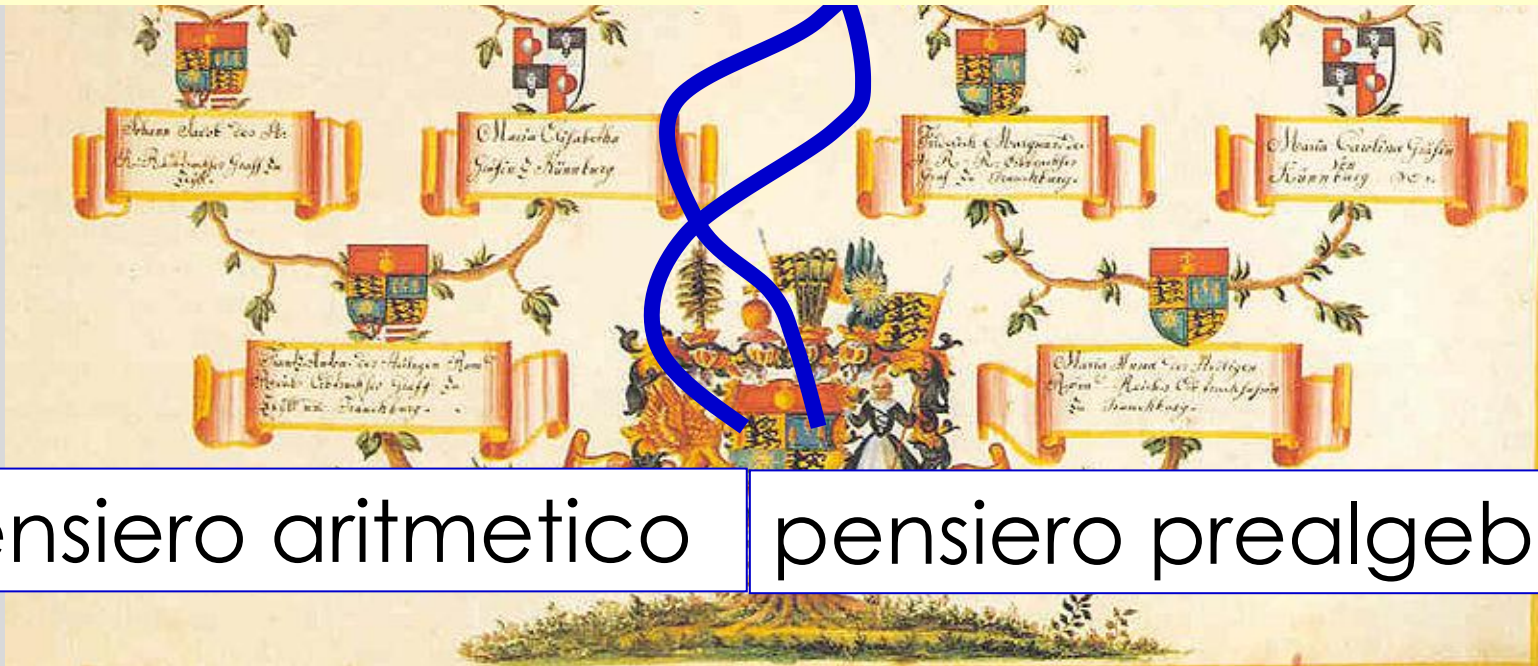


La prospettiva del progetto ArAl



pensiero algebrico

Primo posto al concorso SeT (2001).
Collaborazioni con istituti e reti di scuole.



pensiero aritmetico

pensiero prealgebrico

Collaborazioni ArAI

- Attualmente siamo presenti in:
 - Venezia Giulia: Trieste, Muggia
 - Veneto: Belluno, Eraclea, Jesolo (VE)
 - Emilia Romagna: Bagnacavallo, Conselice, Faenza, Lugo (RA), Modena
 - Piemonte: Mondovì (CN), Nichelino (TO)
 - Liguria: Castelnuovo Magra (SP)
 - Toscana: Firenze, Siena
- Gruppo Progetto ArAI in FB (1800 iscritti)
- www.progettoaral.it
- Collana ArAI (Pitagora Editrice Bologna)

Vi ringrazio per la vostra attenzione