



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

**Matemartistica: come promuovere la conoscenza  
di concetti matematici attraverso l'arte**  
Esperienze e proposte per Scuola Primaria e Secondaria di 1° grado

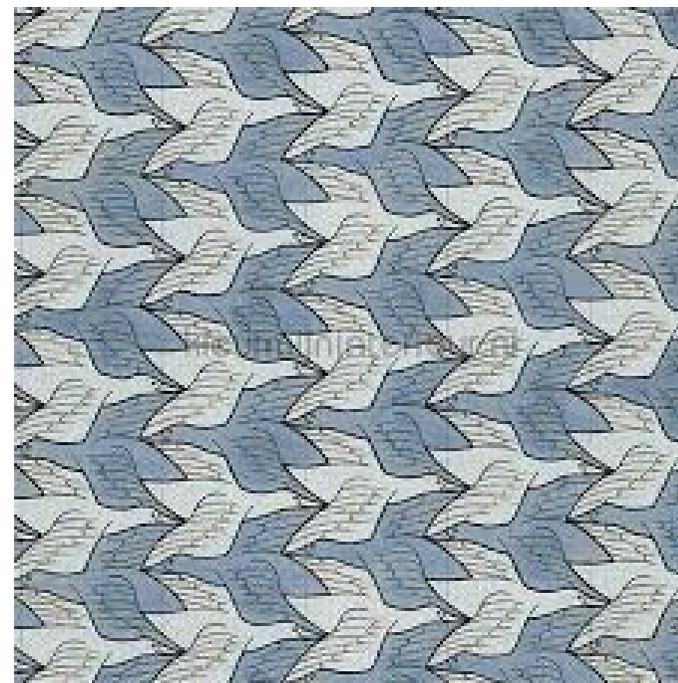
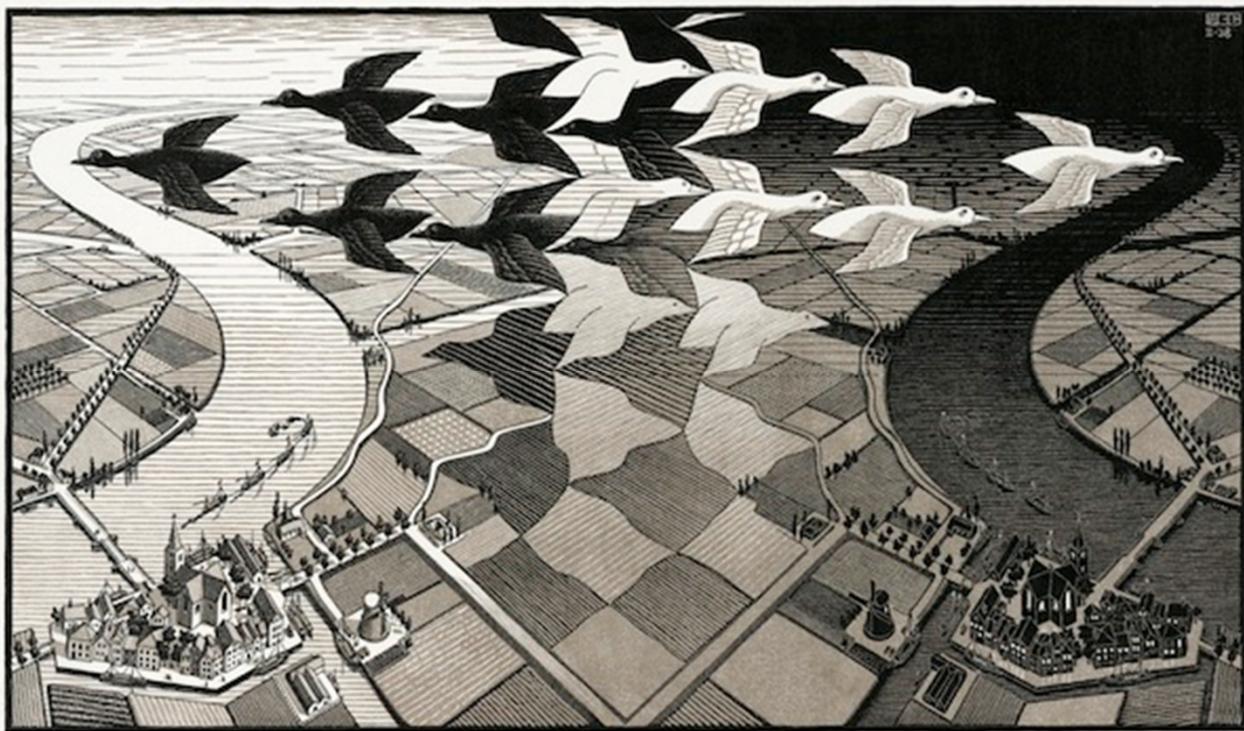
prof. Paola Vighi (ex docente)

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche Università di Parma

**paola.vighi@unipr.it**

**pa.vighi@tim.it**

## M.C. Escher (1898 – 1972)

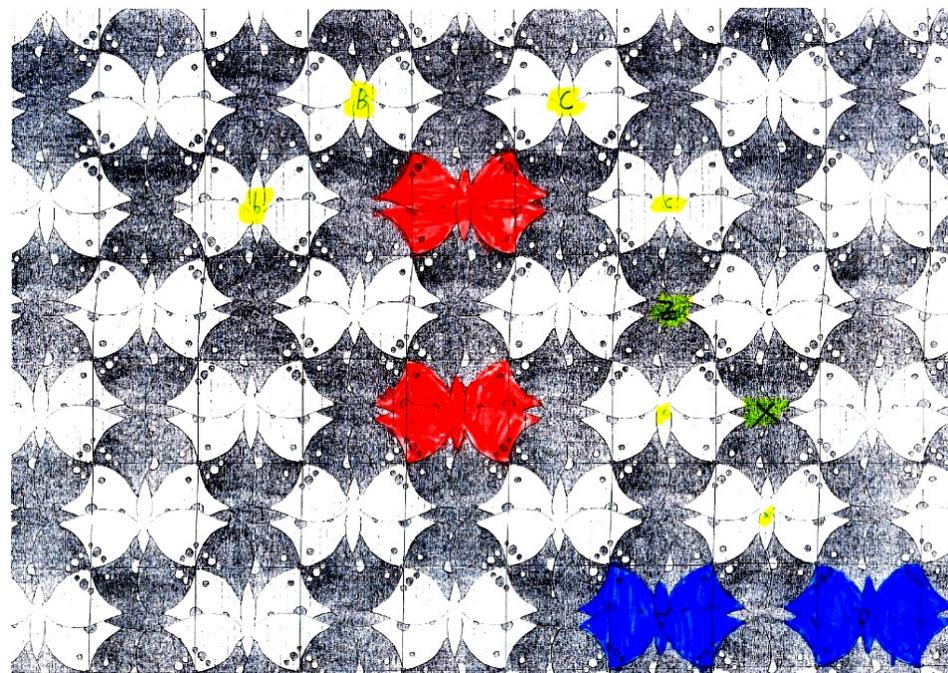
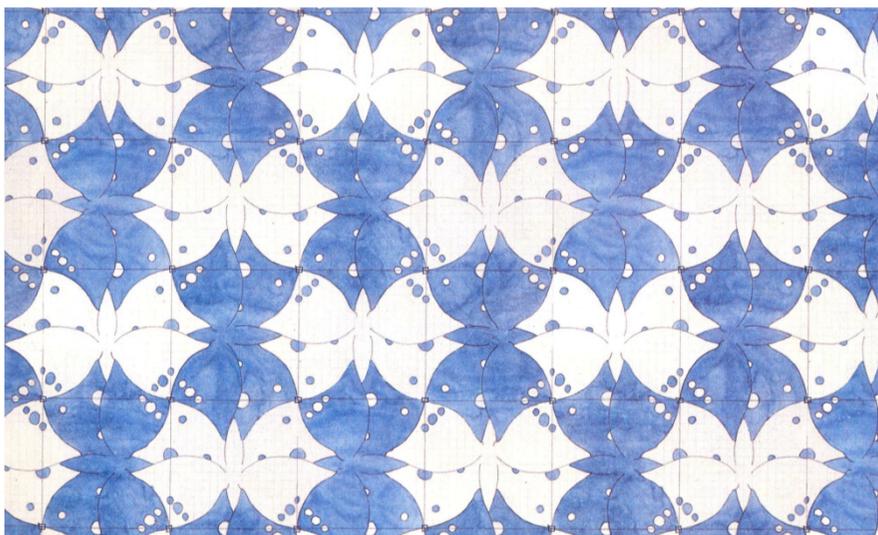


Vighi, P. (1998). Matematica e arte, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 21A-B, 6, 565-583

Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

## Riconoscere figure ruotate, traslate, riflesse



NEL DISEGNO VISTO DA ORIZZONTALE SI VEDONO DELLE PARALLELE BIANCHE IN ORIZZONTALE E DELLE NERE IN VERTICALE. QUELLE BIANCHE HANNO PUNTI NERI, MENTRE QUELLE NERE NE HANNO DEI BIANCHI. L'ARTISTA HA DISEGNATO DUE TIPI DI FIGURE DIVERSE, ALTERNANDOLE NEL DISEGNO. CI SONO DEI TRASLACCHI E DELLE ROTAZIONI COMPLETE (360°)

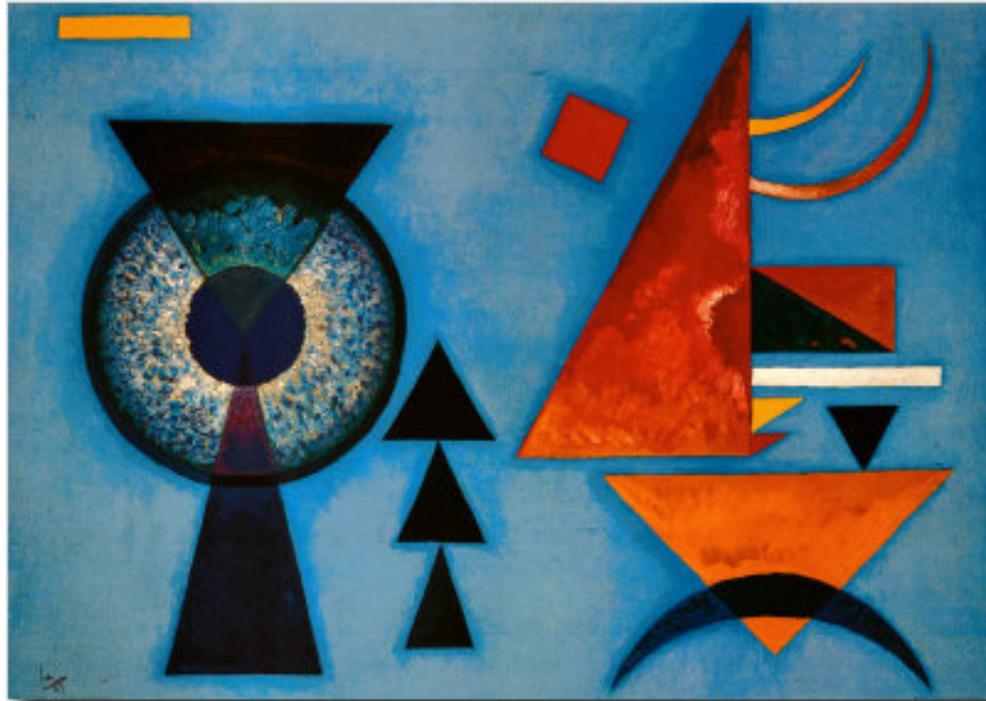
Marchini, M., Vighi, P. (2009). Can we develop geometrical understanding by focusing to isometries?

A teaching experiment by means of geometrical artefacts. In: Novotná, J. & Moraová, H. (Eds.) *Proceedings SEMT '11*, Prague: Charles University - Faculty of Education, 169 – 176.

Matnesis Rozzano, 25/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

## Dall' Arte alla Matematica: primo esempio



**“Soft Hard” (1927)**

L'arte astratta si basa su forme, colori, linee che non hanno un legame concreto con il reale

ARTE ASTRATTA

CONCRETO

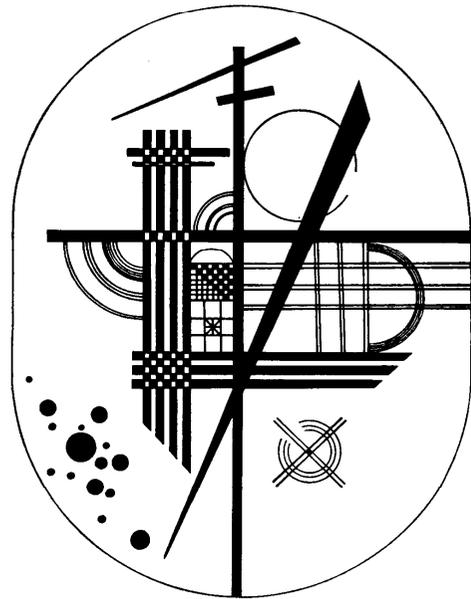
ASTRATTO

MATEMATICA

Biblioteca Adelphi 16

*Wassily Kandinsky*

PUNTO LINEA  
SUPERFICIE



Kandinskij  
(1866-1944)

per Kandinsky, la questione dell'**astrazione** è stata spinta dal desiderio (o dalla necessità) di esplorare le **qualità di forma, linea, colore come entità formali indipendenti**, piuttosto che come elementi pittorici per la descrizione di soggetti di vita  
(Guy et al., 2007, p. 28)

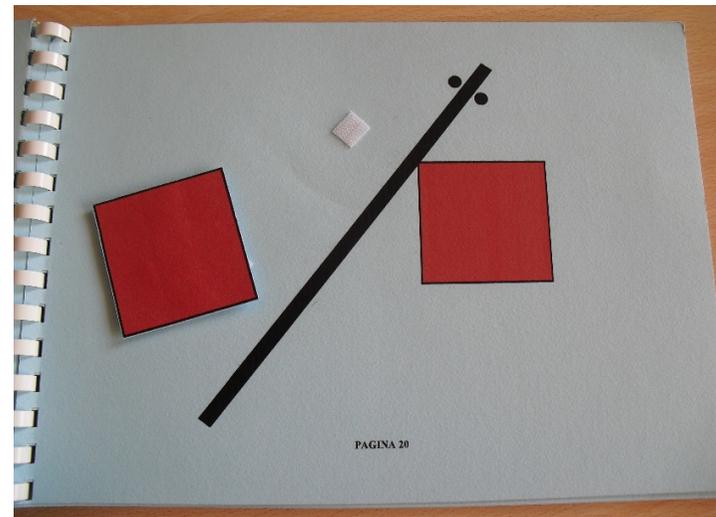
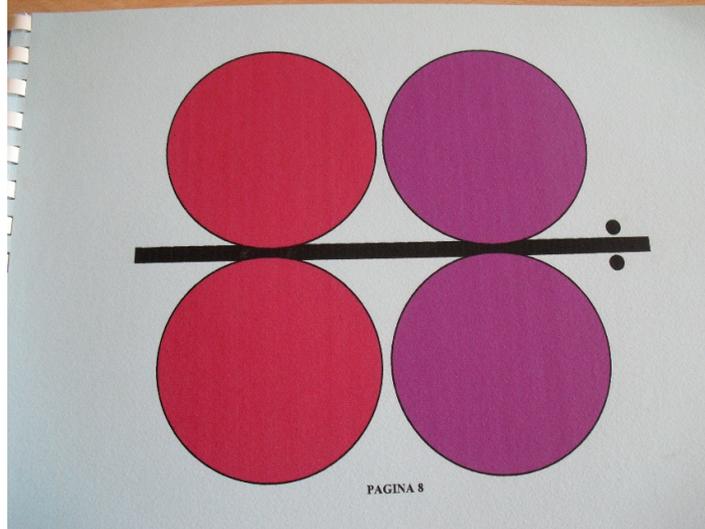
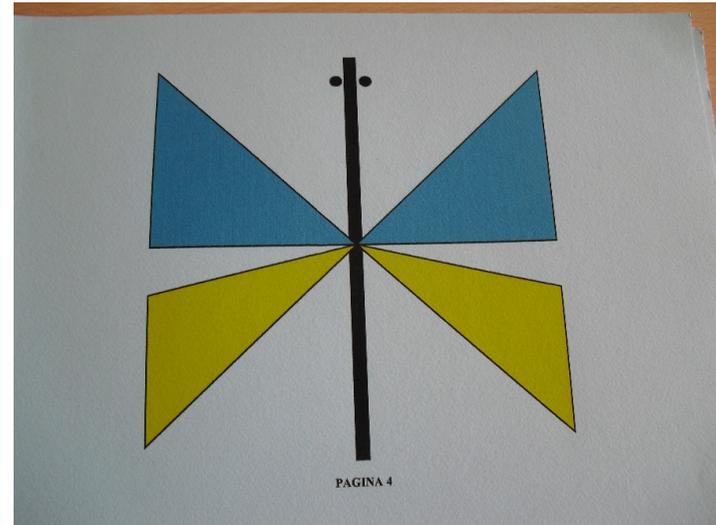
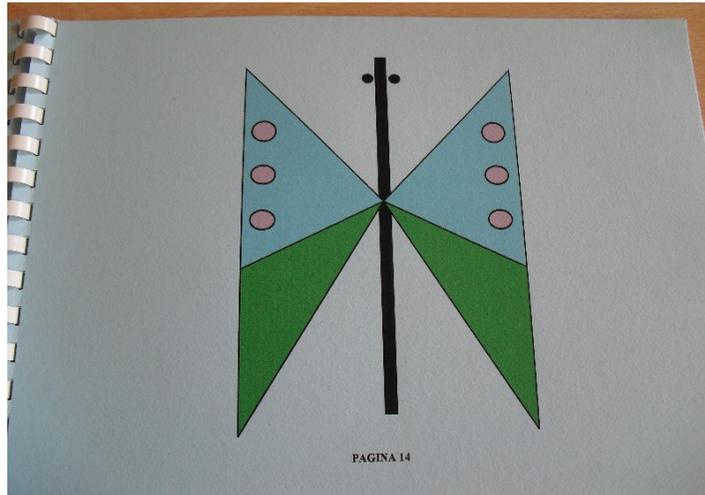
# Il libro del bruco Pelù



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

# Il bruco diventa farfalla



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

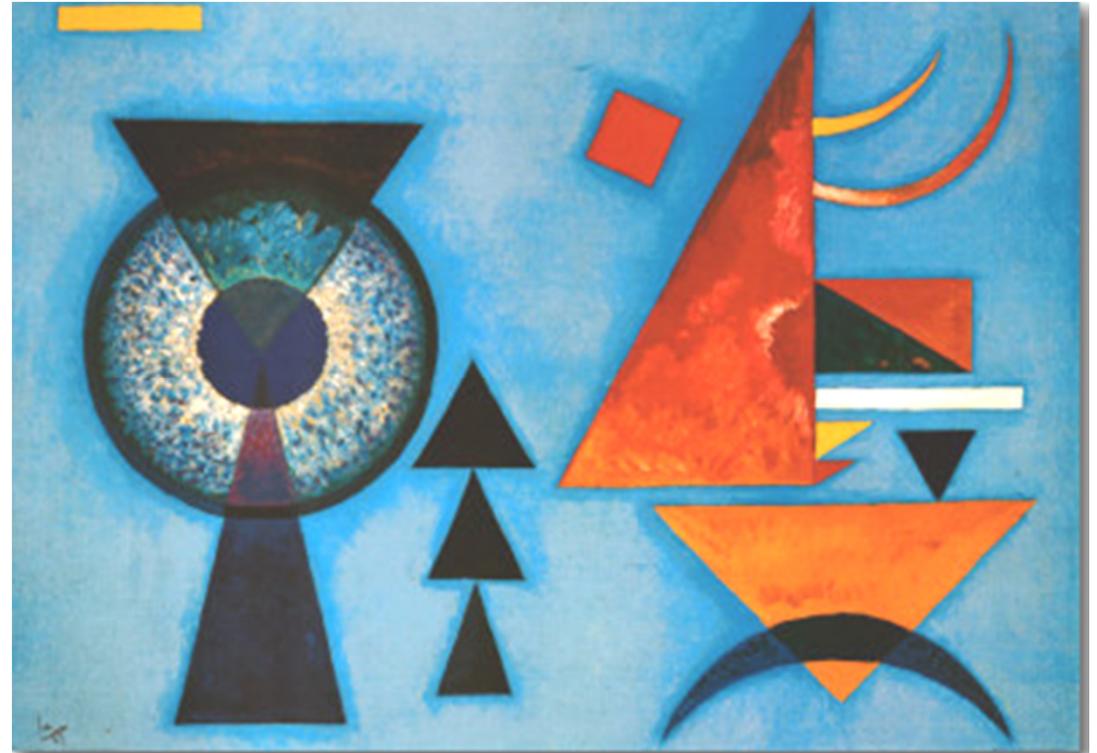
prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

## Il compito:

*Il bruco Pelù è uscito dal libro, è andato sulle pareti della stanza e si è nascosto in questo quadro.*

*Dovete scoprire dov'è.*

*Alcune farfalle hanno perso le ali ... ..*



La necessità di scoprire dove si è nascosto il bruco conduce ad osservare le forme, non solo il dipinto nella sua globalità e promuove la transizione da una **percezione globale** ad una **percezione analitica** (Duval & Godin, 2005)

Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

« ... D.O. Hebb (1961) ci spiega che queste **configurazioni globali**, e non le singole parti di un disegno, rappresentano una chiave di lettura della **percezione delle forme da parte del bambino**.

... la **percezione delle parti e dell'insieme** avviene mediante **processi mentali differenti**.

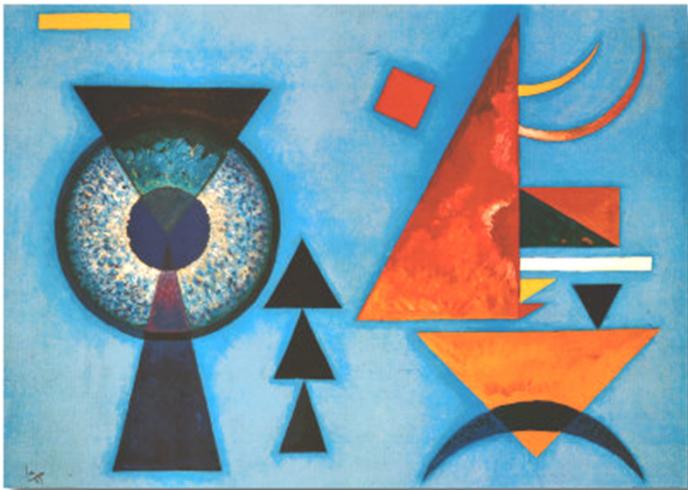
La capacità di vedere un tutto, una Gestalt, è innata; mentre la capacità di vedere le singole parti si acquisisce con un continuo esercizio intellettuale e visivo».

Kellogg, R. (1969). *Analisi dell'arte infantile*, Emme Edizioni, p. 48

Come alcune ricerche sui cosiddetti “**criteri di preferenza**” documentano (Winner, 1982), i bambini di 4-5 anni, posti di fronte ad opere astratte, osservano soprattutto il **colore**, mentre quelli di 6-8 anni sentono l'esigenza di individuare un **referente**, di scoprire gli oggetti nascosti

Mazza, E. (2001). *Incontrare l'immagine*, Roma: Anicia

Scuola dell'Infanzia, bambini di 5-6 anni  
scuola "Lodesana" (Fidenza, PR), insegnante Palma Rosa Micheli



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la  
conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

## Scenario iniziale



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: *Matemartistica*: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte



*Un grande campo da esplorare è quello delle interazioni tra esperienza matematica ed esperienza artistica*

(F. Speranza, appunti, Dalla geometria intuitiva a quella assiomatica)

Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

## Quali oggetti? Quali concetti geometrici?



### Oggetti (o figure)

- usuali o no
- separate o no
- sovrapposte (del tutto o in parte)
- giustapposte
- tre 'taglie': piccolo, medio, grande
- con diversi colori
- con 'denominazione geometrica' oppure no

**Figure geometriche:** 1 quadrato, 2-3 rettangoli, 2 cerchi, 12 triangoli,  
3 oggetti con contorno curvilineo ("accentuazione della linea"  
secondo Kandinsky)

**Trasformazioni geometriche:** assi di simmetria locali, rotazione, similitudine,  
topologia (dentro/fuori, sopra/sotto, sinistra/destra)

**Concetto di spazio:** organizzazione spaziale e reciproca posizione delle forme,  
orientazione, parallelismo, orizzontale/verticale

## Perché “Soft Hard” ?

### **Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione (MPI, 2012):**



#### **IMMAGINI, SUONI, COLORI**

L’incontro dei bambini con l’arte è occasione per guardare con occhi diversi il mondo che li circonda. I materiali esplorati con i sensi, le tecniche sperimentate e condivise nell’atelier della scuola, le osservazioni di [...] e di opere (quadri, musei, architetture) aiuteranno a **migliorare le capacità percettive, coltivare il piacere della fruizione, della produzione e dell’invenzione** e ad avvicinare alla cultura e al patrimonio artistico.

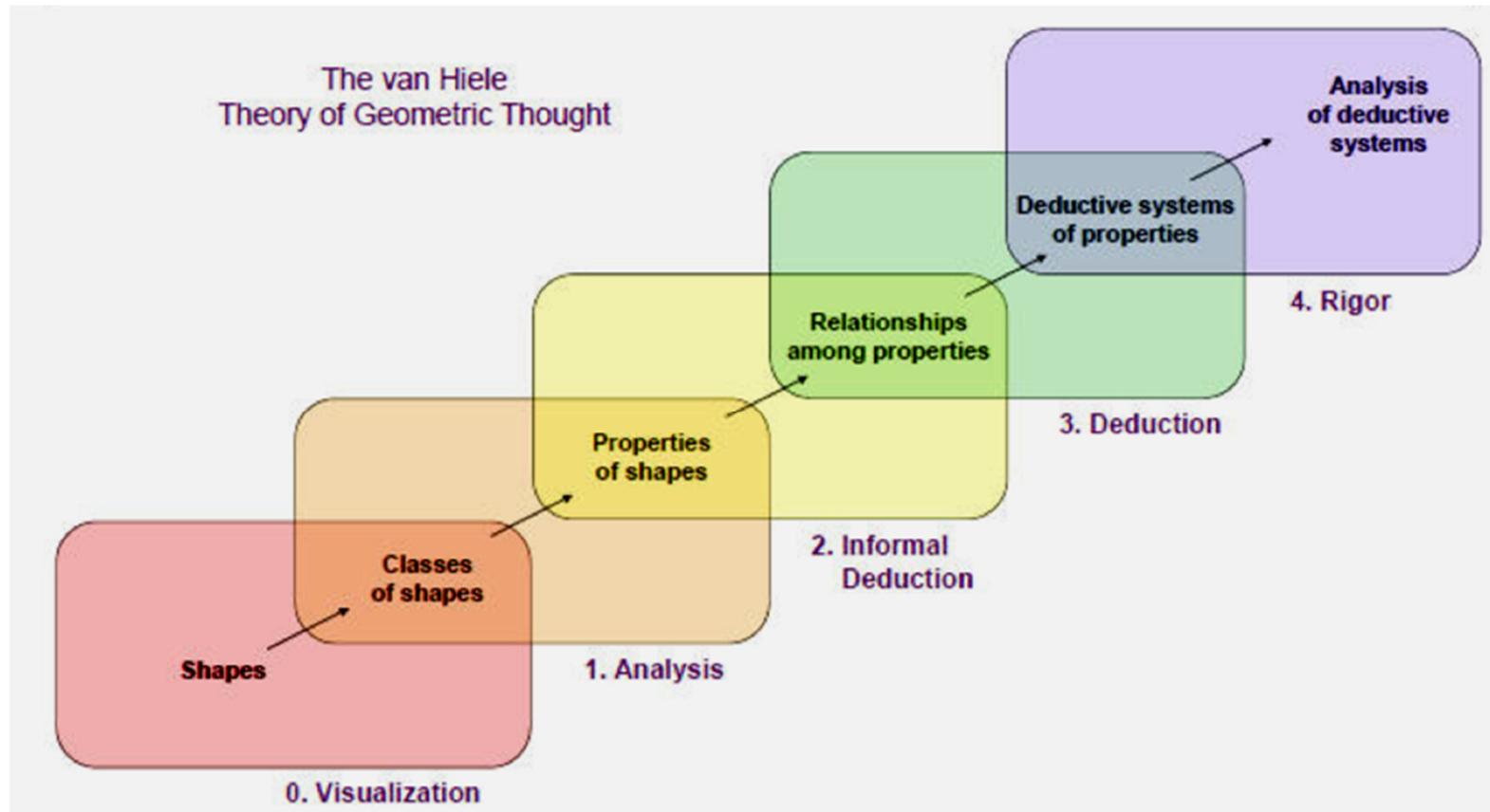
#### **LA CONOSCENZA DEL MONDO**

Toccando, smontando, costruendo e ricostruendo, affinando i propri gesti, **i bambini individuano qualità e proprietà degli oggetti** e dei materiali, ne immaginano la struttura e **sanno assemblarli in varie costruzioni**; riconoscono e danno un nome alle proprietà individuate, si accorgono delle loro eventuali trasformazioni.

#### **Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta**

Descrivere, denominare e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie ...  
Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse.

## Teoria di Van Hiele (1986)



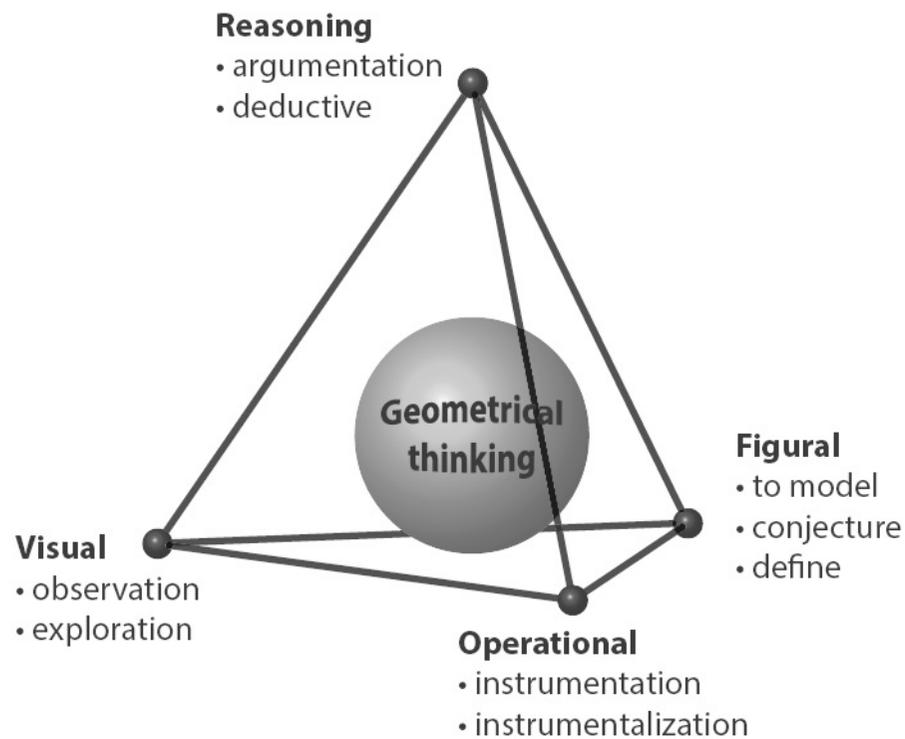
il primo livello della conoscenza spaziale è il “livello visuale”, in cui i concetti si sviluppano a partire dall’osservazione della realtà: prima i bambini apprendono a riconoscere le forme, poi ad analizzarne le proprietà /secondo livello), ecc.



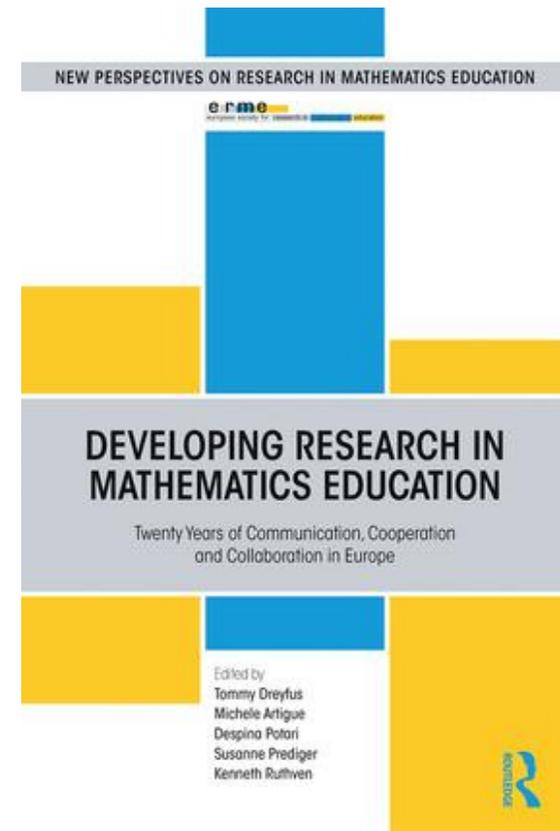
I bambini iniziano molto presto ad avere una comprensione concettuale delle figure geometriche, ma la loro comprensione si stabilizza verso i 6 anni di età (Gagatsis & Patronis, 1990), dunque il periodo 3-6 anni può essere un periodo critico per l'apprendimento delle figure geometriche (Clements & Sarama, 2016).

### *Identificazione di figure*

- la presentazione di figure comuni (cerchio, quadrato, triangolo, rettangolo) in particolari forme e posizioni può condizionare notevolmente il pensiero del bambino
- l'orientazione di figure non è tenuta in considerazione
- la mancaza di simmetria condiziona le scelte e l'operato dei bambini
- il cosiddetto rapporto di forma (rapporto tra le dimensioni della figura) ha un ruolo importante



**Figure 1: The geometrical competencies**



Maschietto, M., Mithalal, J., Richard, P., & Swoboda, E. (2013). Introduction to the papers and posters of WG4: Geometrical thinking. *CERME8*, 578-584.

Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: *Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte*

- Una nuova attività allo scopo  
di favorire
- l'**osservazione delle forme**,
  - della loro **orientazione**
- e
- **disposizione** rispetto al foglio

Consegna: riprodurre il quadro di  
Kandinsky, collocando su di un foglio  
i diversi pezzi (forniti dall'insegnante)



# ALCUNI PROTOCOLLI di Scuola dell'Infanzia



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

«Il problema del **riconoscimento visuale delle forme** inizia quando non c'è una sola forma isolata, ma almeno due che possono essere separate, giustapposte, parzialmente sovrapposte, o una inscritta nell'altra»

Duval, R. (2016), Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences  
In: M. Iori (Ed.), *La Matematica e la sua Didattica*, Bologna: Pitagora, p. 214

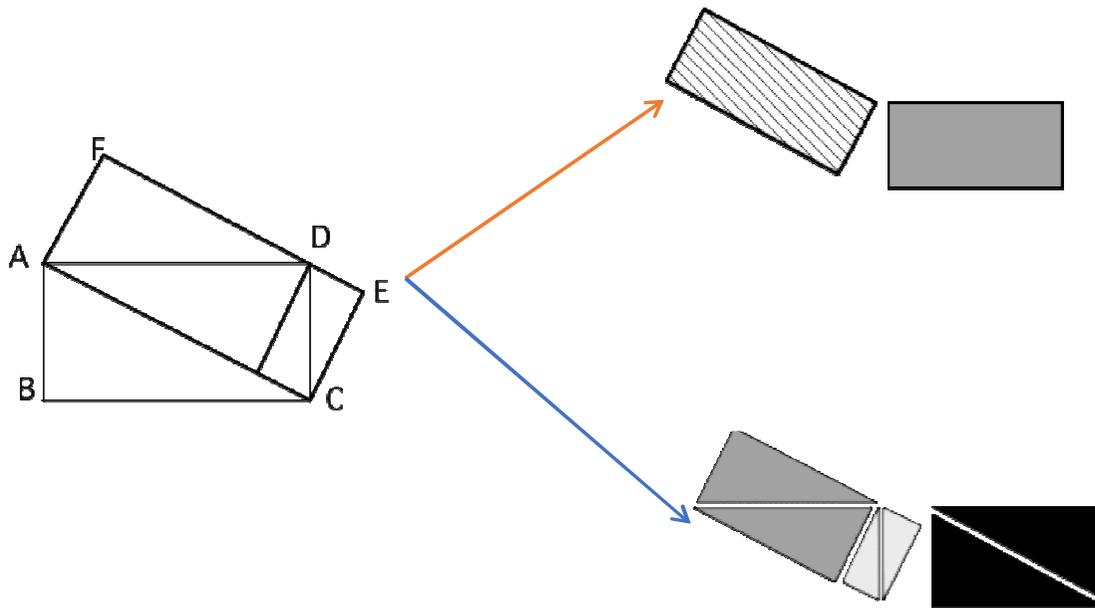
«**Vedere in geometria** mobilita le stesse operazioni di riconoscimento visuale che vedere un quadro, almeno per una utilizzazione euristica delle figure.  
Ma vedere in geometria richiede anche in modo paradossale una **decostruzione dimensionale delle forme** per poter comprendere il linguaggio e i ragionamenti geometrici».

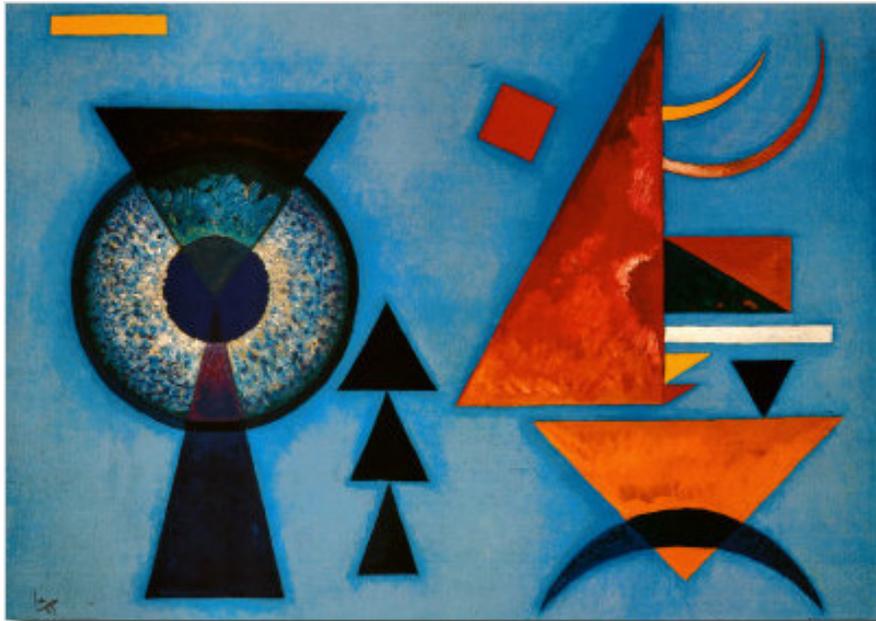
Duval, R. (2016), Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences  
In: M. Iori (Ed.), *La Matematica e la sua Didattica*. Bologna: Pitagora, p. 219

# Dalla visualizzazione iconica alla visualizzazione non-iconica

## Decomposizione mereologica

(Duval, 2005)





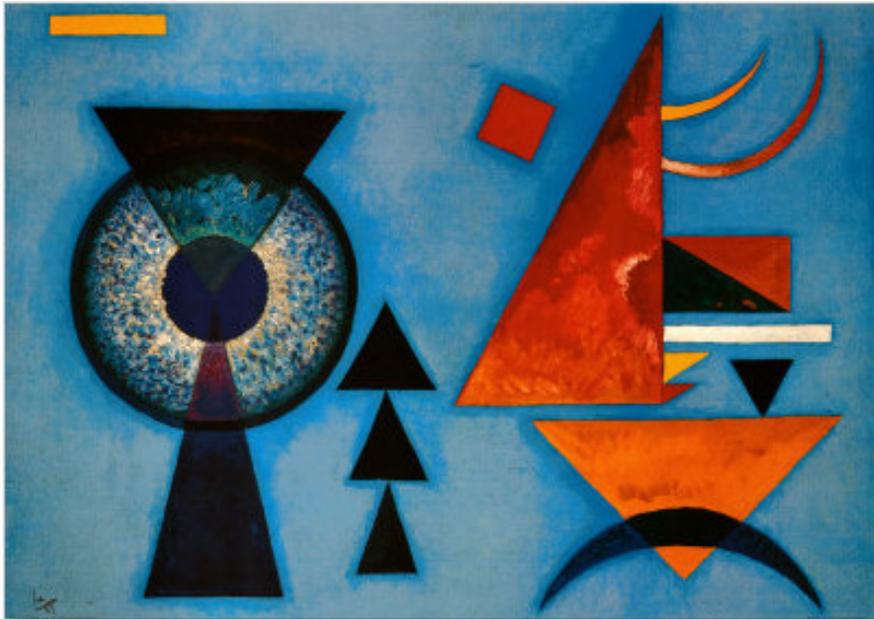
## Gabriele

- direzioni orizzontale e verticale: sì, compatibilmente con problemi di manualità
- quadrato rosso non parallelo all'ipotenusa del grande triangolo rosso
- sequenza dei triangoli neri nell' "albero" non rispettata
- rettangolo bicolore staccato, ruotato e ...
- piccoli triangoli rosso e giallo capovolti e scambiati tra loro



## Gaia

- mancato rispetto di orizzontale e verticale (a sinistra)
- non corretta sequenza dei triangoli neri nell' "albero"
- mancato rispetto della simmetria
- non distanza tra il grande triangolo rosso e quello arancio (barca?)
- scambio delle linee curve (e in posizione scorretta)



## Dylan

- nessuna distinzione tra i triangoli neri
- triangolo giallo capovolto
- quadrato rosso ben posto
- rettangolo bicolore simmetrico rispetto alla verticale

## Il bambino



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

## La barca a vela



prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

‘Fruizione spontanea delle immagini’ da parte di bambini di 4-8 anni:

Il soggetto o il colore sembrano i parametri che determinano le preferenze dei bambini di questa età. Anche di fronte ad opera astratte si nota il “bisogno referenziale” di individuare una somiglianza, di scoprire quale oggetto “si nasconde” dietro la stranezza apparente

Mazza (2001, p. 58)



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

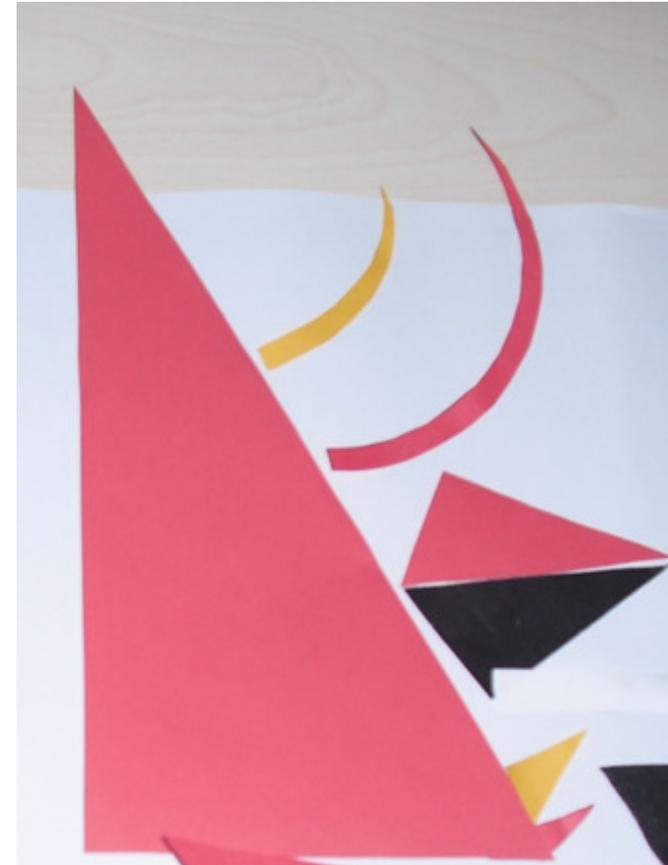
# Il problema dell'orientazione dei triangoli



## INDICAZIONI NAZIONALI 2012

Utilizzare e distinguere i concetti di perpendicolarità, parallelismo, orizzontalità e verticalità.

# Il problema del ribaltamento

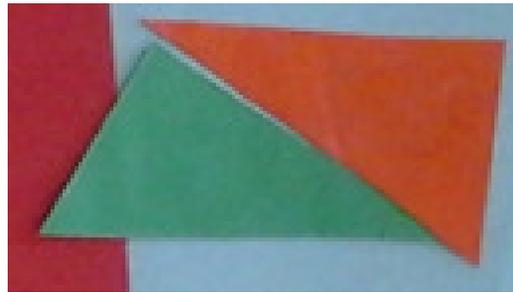
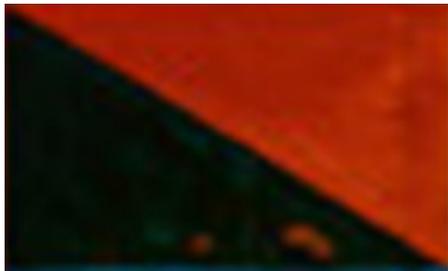


Mathesis Rozzano, 23/04/2020

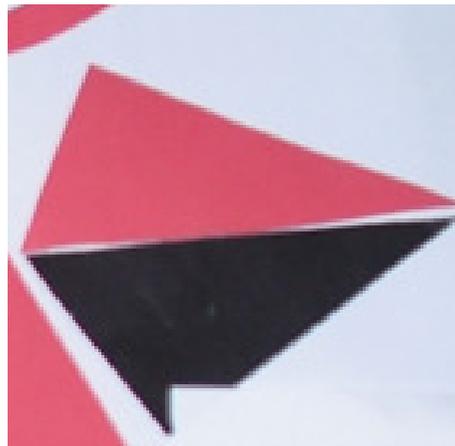
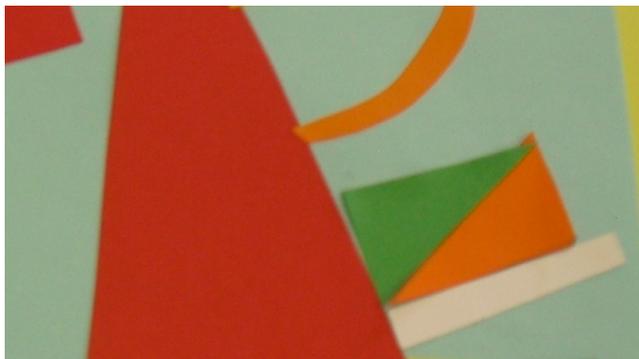
prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

# Il problema del 'rettangolo bicolore'

ORIGINALE

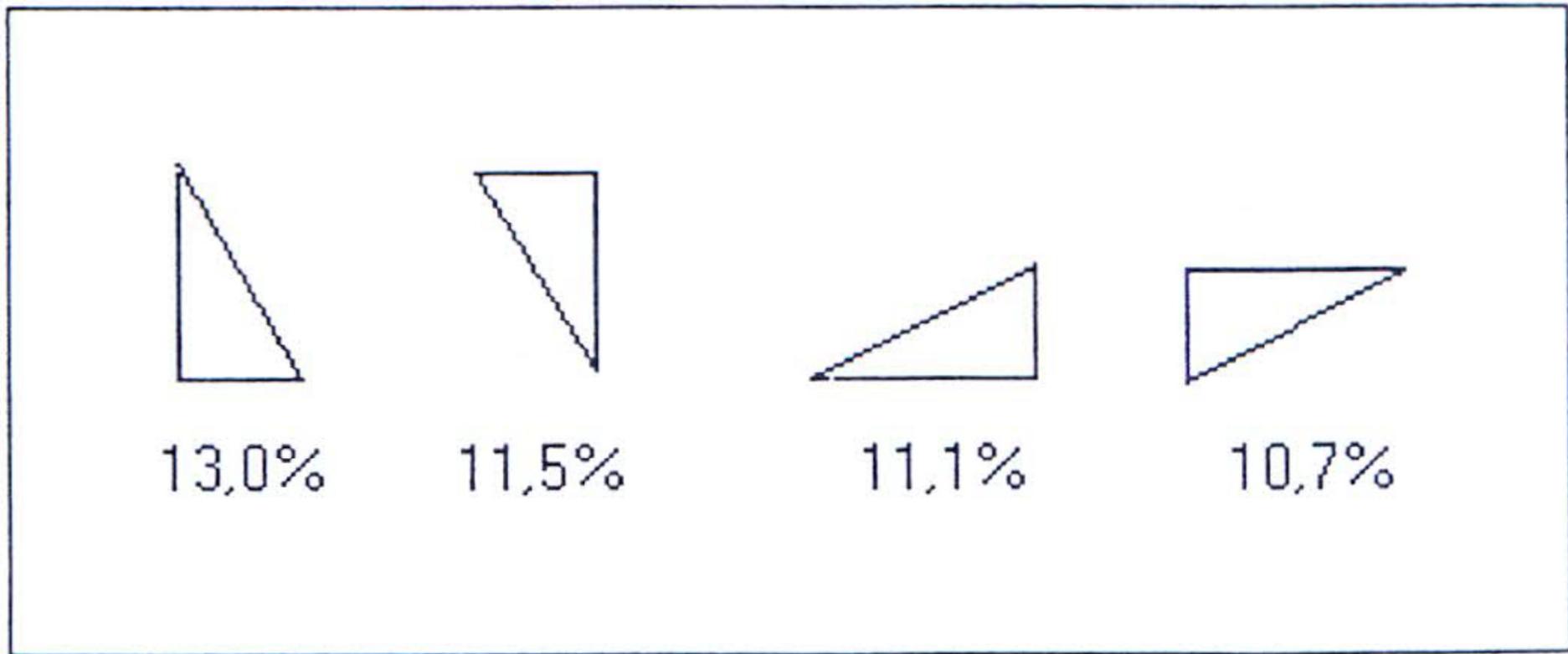


COPIE



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte



Cooper, M. L'inevitabile influenza dell'orizzontale e verticale in geometria e in diversi ambiti del comportamento umano, *L' Educazione Matematica*, 81-99.

## Le copie monocolori



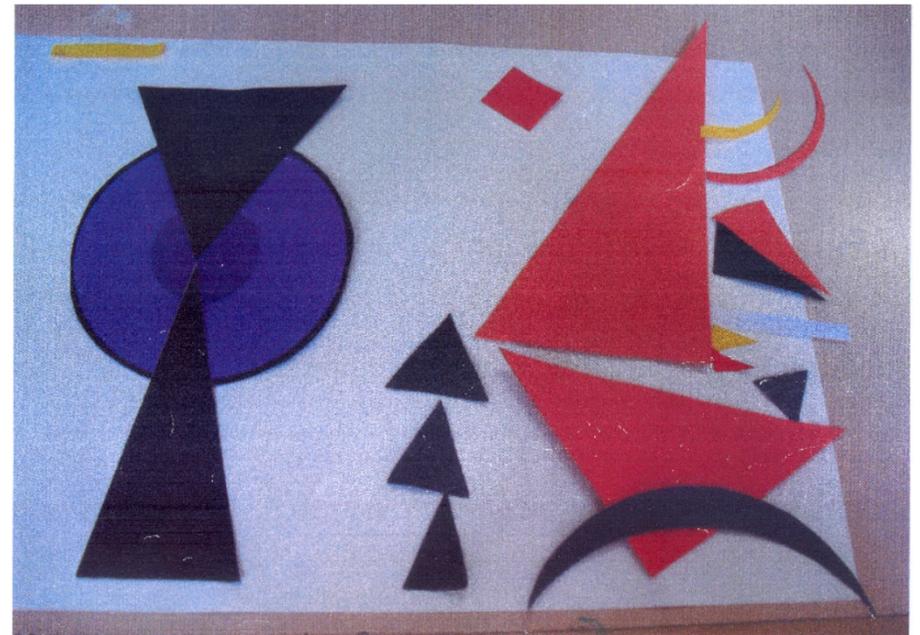
Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

# Studio dello sviluppo del linguaggio metaforico e geometrico (Pedagogická Fakulta, Univerzita Karlova -Praga- 2018/19) Sperimentazione in classe quinta di Scuola Primaria



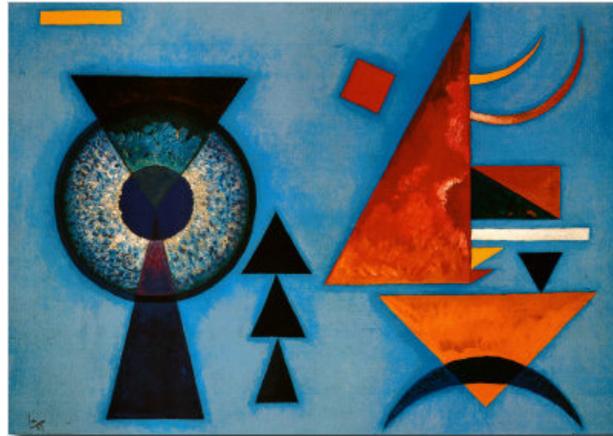
**Quadro di Kandinsky**



**Copia fatta da Mario**

# METAFORA

Espressione verbale o gestuale che permette la comunicazione con altri soggetti



forme geometriche

mezzaluna, mare nella notte, barca a vela, faro, pesci

albero, montagna con il sole che sta tramontando o sorgendo, montagna con il vento che passa vicino

finestra rotonda con i raggi, finestra con le luci, un meraviglioso prato un mix tra viole e lavanda, un signore con dei baffi molto lunghi, un abete natalizio, se giro il foglio (di 90° in senso antiorario) mi sembra una nave sullo sfondo blu, quadrato ... protagonista di Pezzettino.

*Mathesis Rozzano, 23/04/2020*

*prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte*



Triangolo rosso piccolo: al contrario - all'incontrario - capovolto - sottosopra

Il triangolino giallo è girato, rivolto

L'alberello era isoscele - il triangolo in basso non in mezzo alla base - doveva metterli un po' più in linea - più dritto

Rettangolo bicolore: doveva essere un rettangolo - forma un deltoide - non è un quadrato ma un romboide - sbagliato doveva fare un quadrato

Triangolino nero sopra al rosso: l'altezza doveva essere perpendicolare alla base

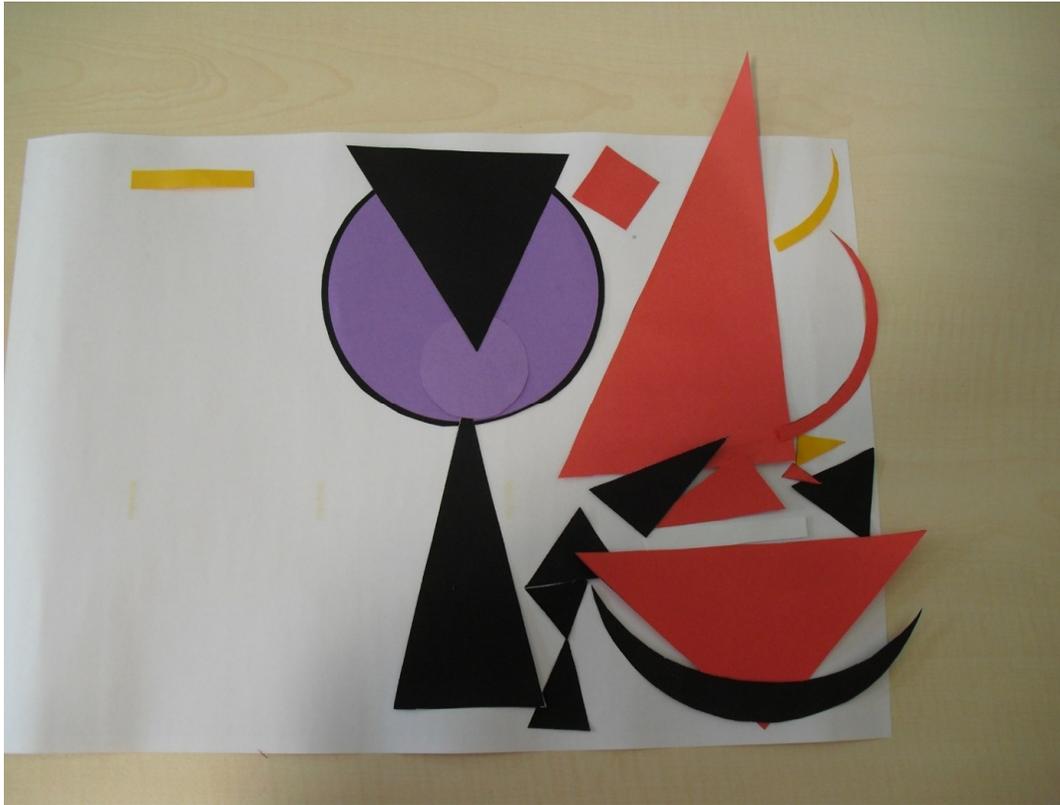
Quanti rettangoli?  
 Quanti cerchi?  
 Quanti triangoli?

È un rettangolo?



	1	2	3	10	12	Altro
rettangoli		27%	58%			15%
cerchi	11%	85%				4%
triangoli				31%	62%	7%

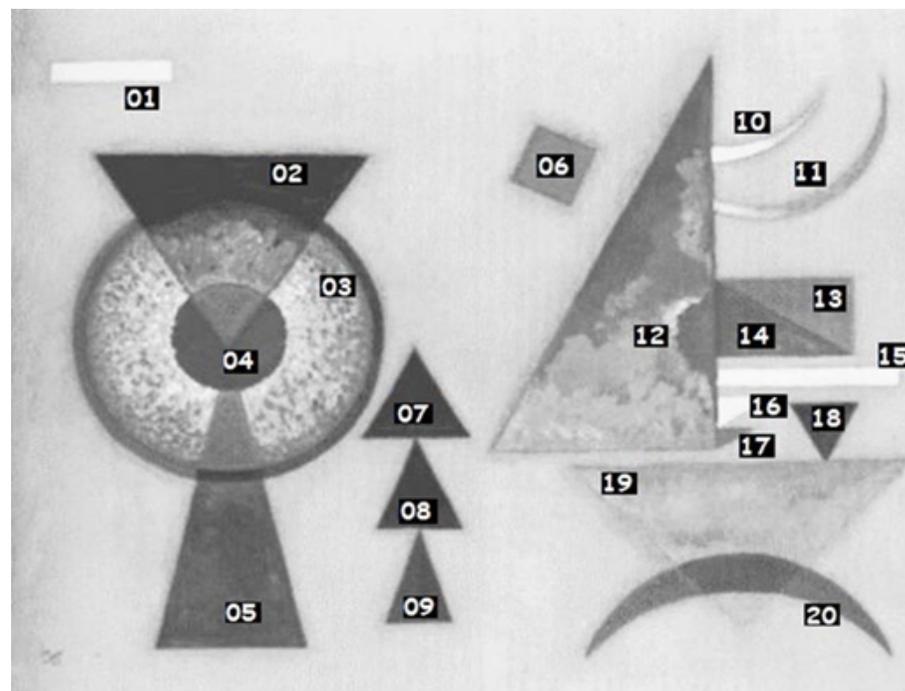
## Il ruolo dello sfondo



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

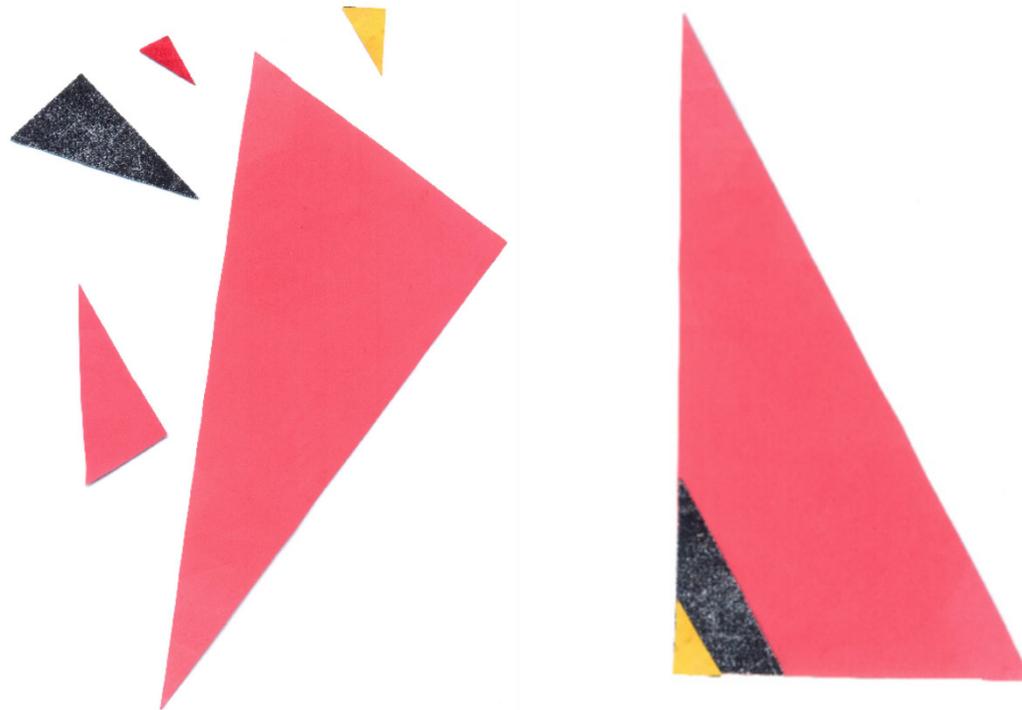
prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

Se lo sfondo è di formato A4 (29,7 cm x 21,0 cm)  
quali misure deve avere il rettangolo bicolore? E il triangolo n° 12? Ecc.  
E se lo sfondo fosse di formato A3?





# SIMILITUDINE



Rapporto tra i cateti

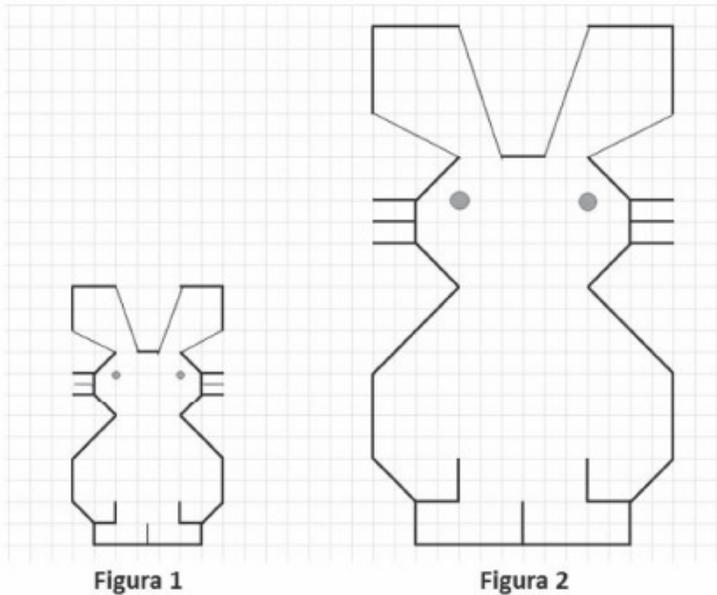
del triangolo rosso  
 $12,7 : 6,8 \cong 1,867$

del triangolo nero  
 $4,2 : 2,4 \cong 1,75$

Commentare ...

## Domande INVALSI (D20 classe seconda, D21 classe quinta)

D20. Osserva.

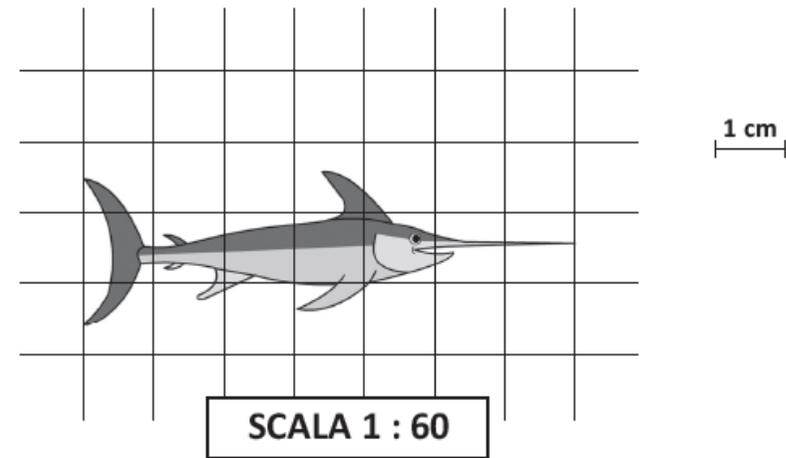


Per ottenere la Figura 2 è stata ingrandita la Figura 1.  
Quale regola è stata seguita?

- A.  Ogni  diventa 
- B.  Ogni  diventa 
- C.  Ogni  diventa 

Mathesis Rozzano, 23/04/2020

D21. Gli alunni di una classe disegnano gli animali che hanno studiato in scienze.  
Riducono in scala le misure reali degli animali studiati.  
Paolo fa il disegno che vedi in figura.



Quanto è lungo nella realtà il pesce?

Risposta: ..... centimetri

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la  
conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

<https://www.tuttiquadri.it/kandinsky/molle-durezza.htm>

Segli un'opzione

*Misure*

•29 x 41 cm. 105 €

$29 : 41 = 0,70731731731 \dots$

•38 x 54 cm. 110 €

$38 : 54 = 0,70731731731 \dots$

•47 x 67 cm. 115 €

$47 : 67 = 0,70149 \dots$

•62 x 89 cm. 139 €

•74 x 105 cm. 185 €

•88 x 126 cm. 229 €

•125 x 179 cm. 399 €

...

**Disponibile**

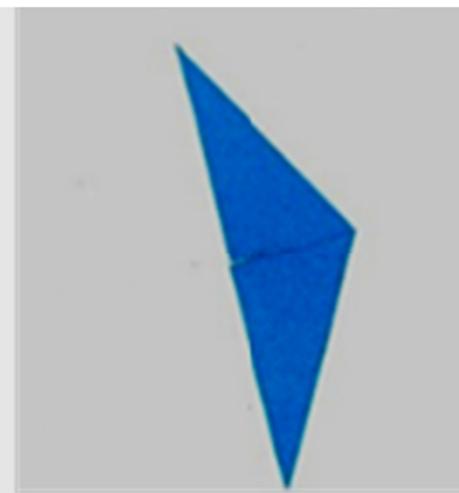
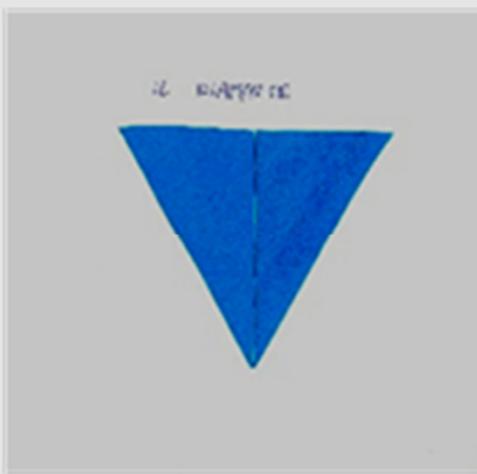
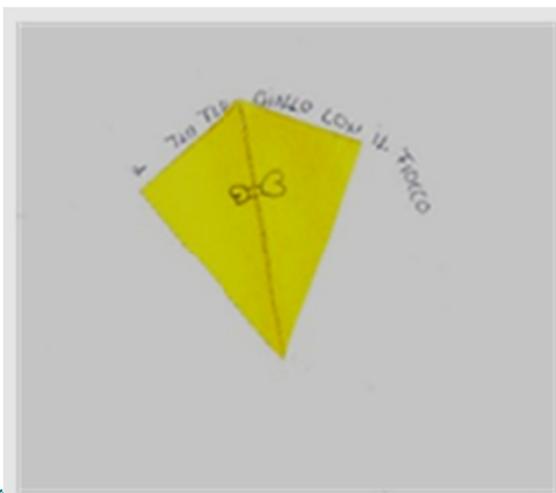
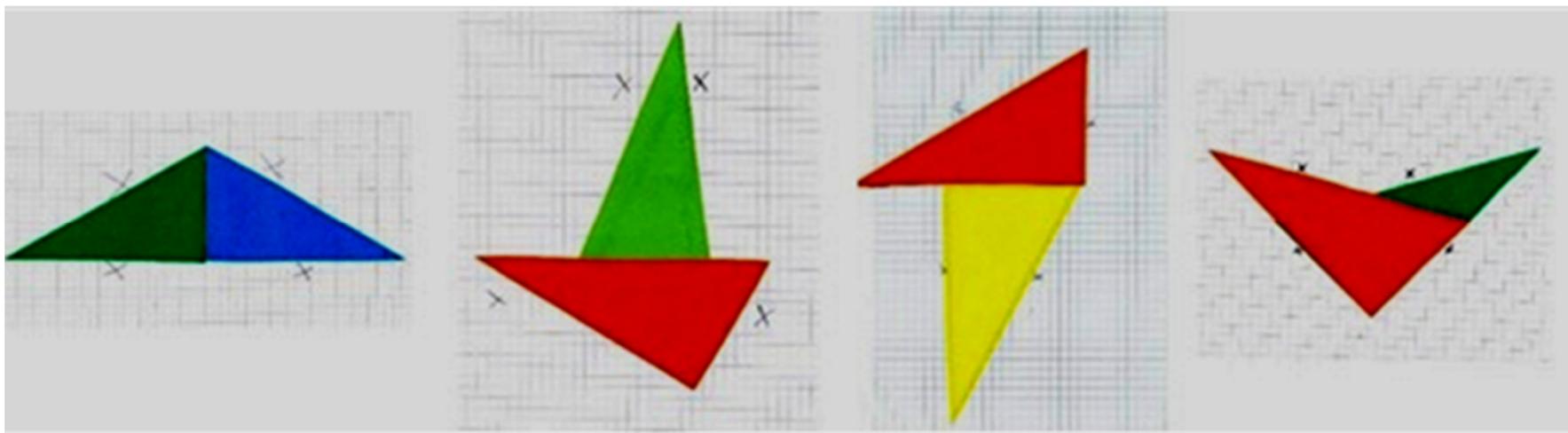
Invio gratis

## Risultati

- I bambini lavorano localmente, trascurando la costruzione globale: la loro attenzione è solo su coppie o piccoli gruppi di figure  
(lavoro ‘object to object’ (Swoboda, 2011))
- La manipolazione di ‘sagome’ non simmetriche è difficile: l’idea di capovolgere è presente solo in alcuni bambini  
Le isometrie dirette sono più ‘naturali’ di quelle inverse
- Come è noto, lo spazio del bambino è ‘non indipendente’: prima ci sono gli oggetti, lo spazio è ‘creato’ da questi oggetti.
- È anche uno spazio ‘non isotropo’: i bordi del foglio individuano due direzioni privilegiate
- È ‘limitato’ dai bordi del foglio (80%)

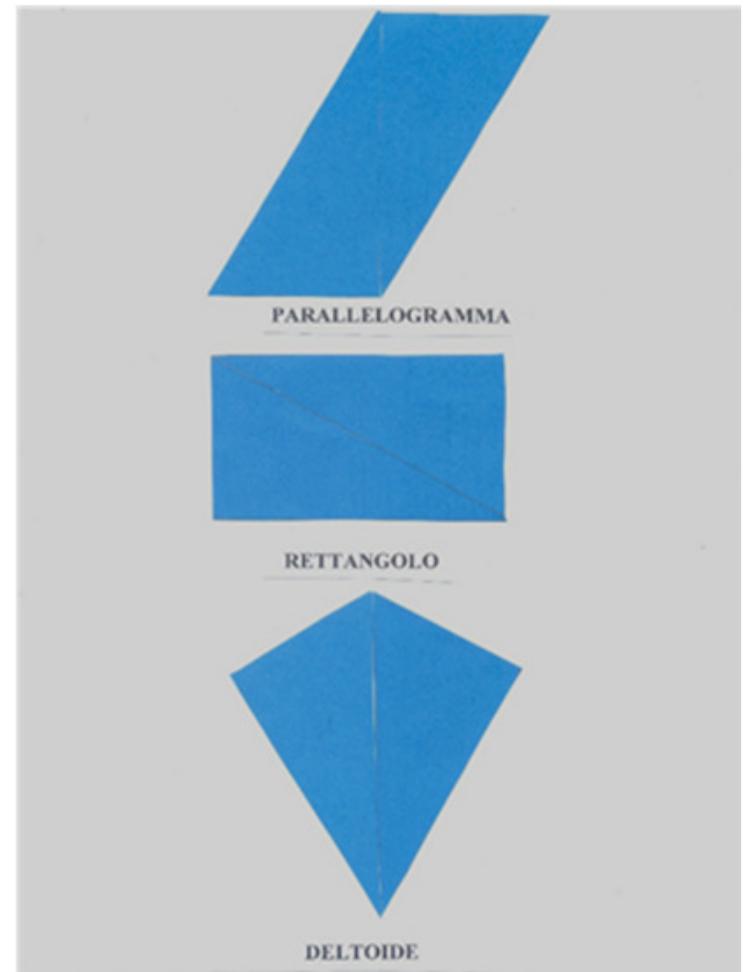
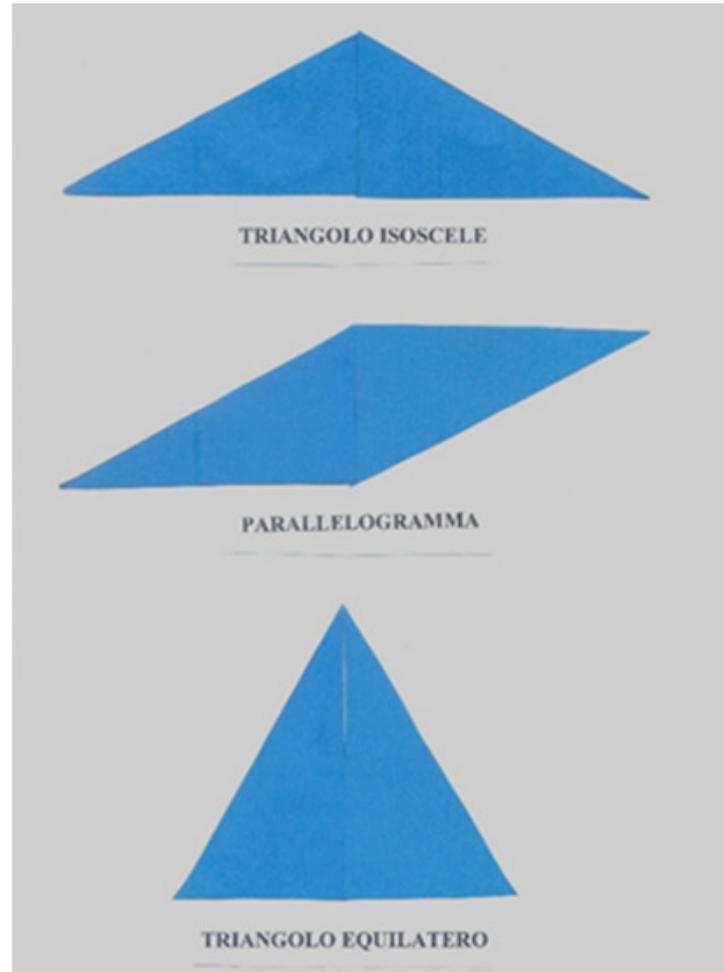
# ANNO SCOLASTICO 2016/17 Classe quarta e quinta di scuola Primaria

Consegna: con questi due triangoli costruisci la figura che vuoi e conta i lati



## Consegna 4: costruiamo un poster e posizioniamo le etichette

- TRIANGOLO ISOSCELE
- TRIANGOLO EQUILATERO
- PARALLELOGRAMMA
- PARALLELOGRAMMA
- RETTANGOLO
- DELTOIDE
- ROMBO
- QUADRATO
- TRAPEZIO
- TRIANGOLO SCALENO



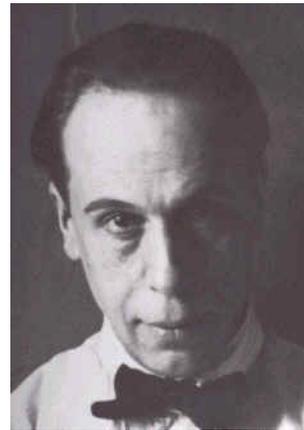
<http://www.rivistaddm.ch/index.php/ultimo-volume-2/2017-02-vighi>

Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

## Dall'Arte alla Matematica: secondo esempio

Dall'Arte alla Matematica  
attraverso le opere di



**THEO VAN DOESBURG**

(Christian Emil Marie Képper)

**1883 - 1931**

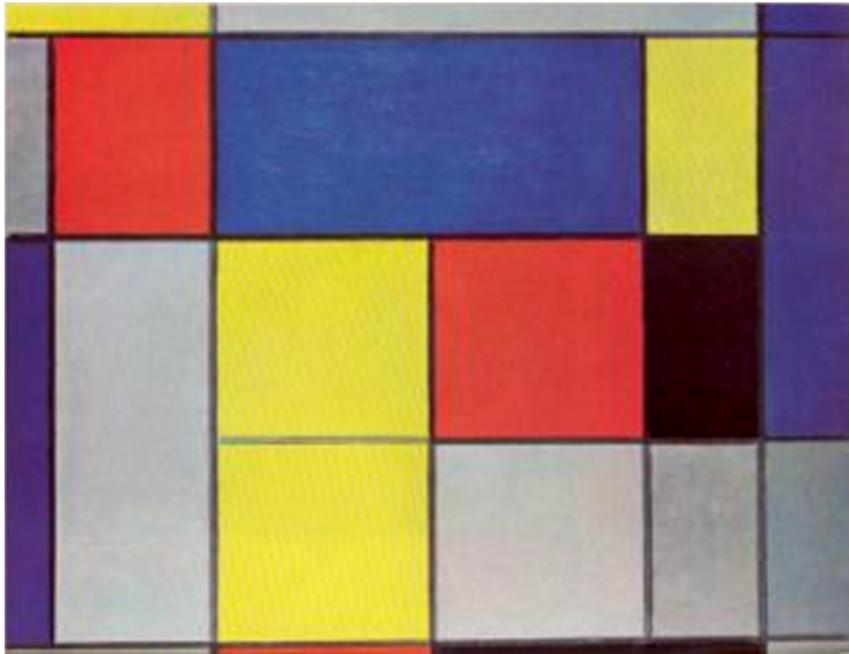
Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: *Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte*

## conflitto culturale con Mondrian nel 1924

una ragione è l'introduzione della *diagonale*

un fattore dinamico che, secondo Mondrian, interrompe l'equilibrio della composizione



Piet Mondriaan  
Compositie XIII (1930)

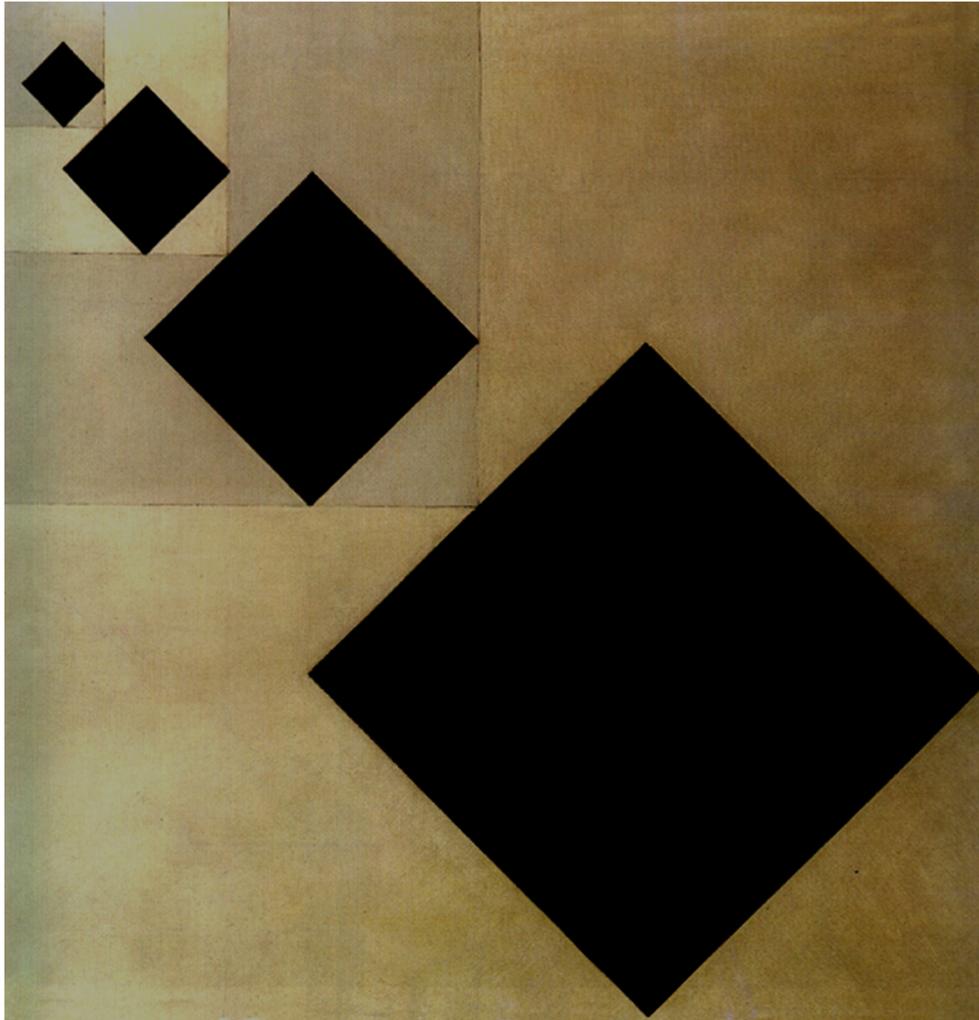
Mathesis Rozzano, 23/04/2020



Theo van Doesburg  
Contra-Compositie XIII (1930)

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la  
conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

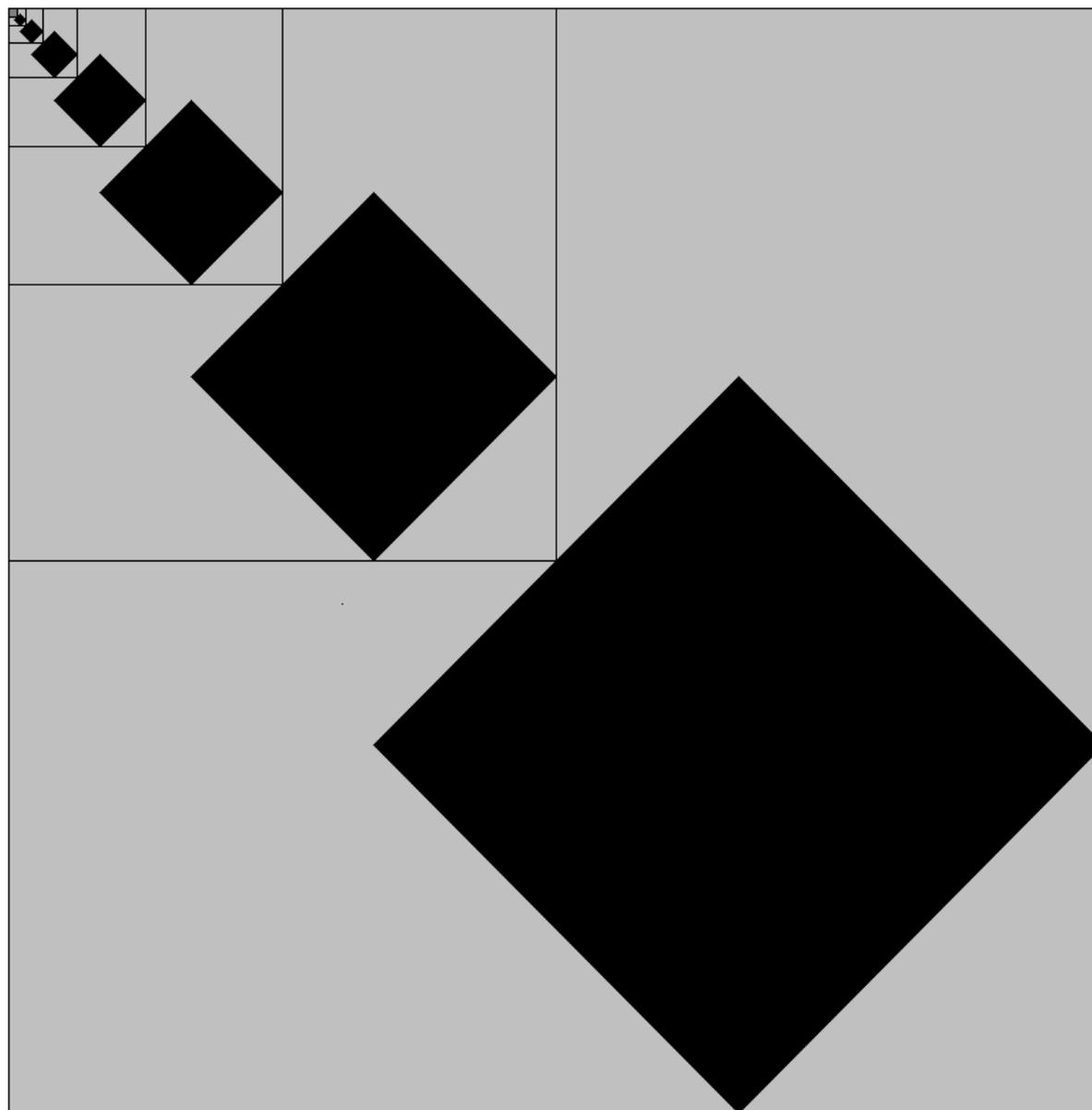
# Arithmetic Composition I (1930)



Perché **'arithmetic'**  
quando il dipinto sembra basato su  
**figure geometriche**  
e  
**costruzioni geometriche?**

istrica: come promuovere la  
conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

# Spazio e tempo



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

## Studio (1926/1929)

Qual è la relazione tra le misure dei lati dei quadrati neri?

E tra le loro aree?

1, 2, 4, 8, ...

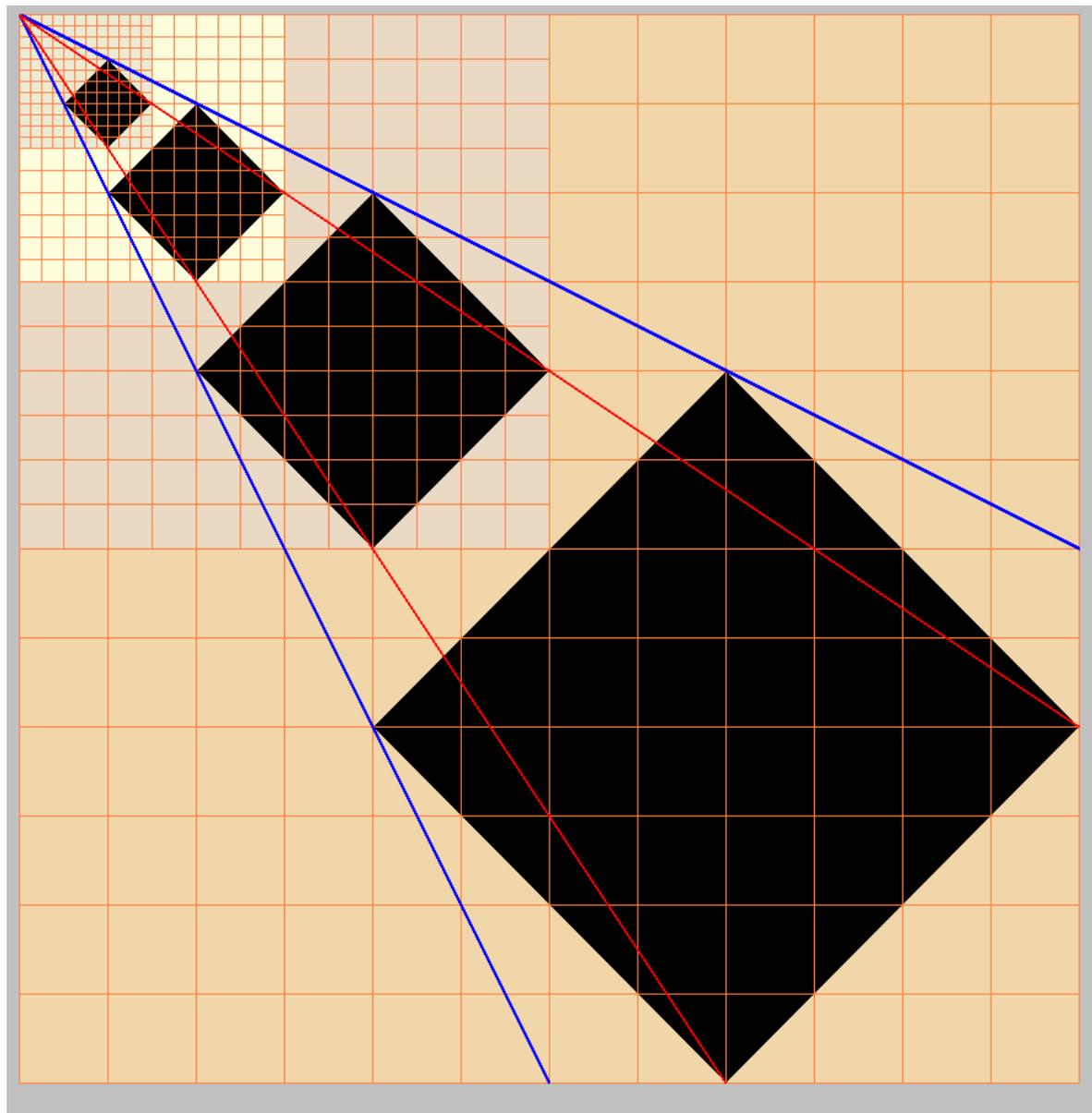
1, 4, 16, 64, ...

Dialogo di Platone  
tra Socrate e il servo

Rapporto tra i lati      1 : 2

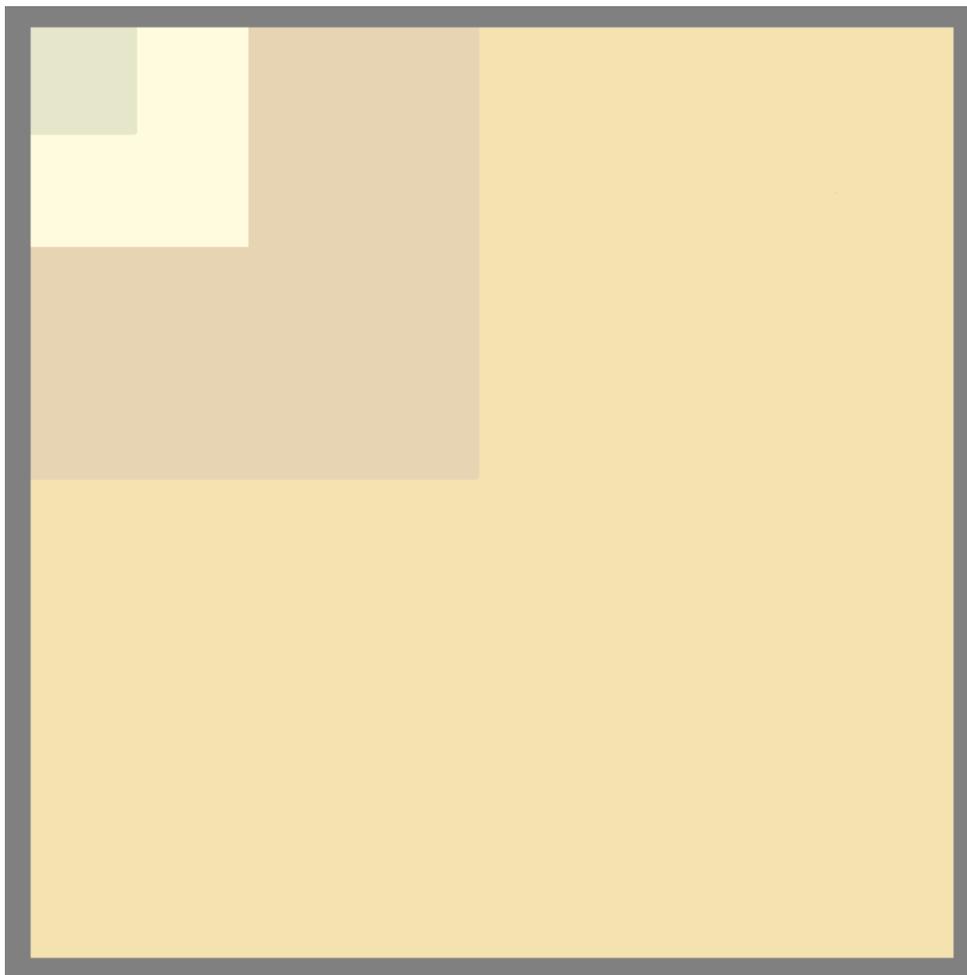
Rapporto tra le aree    1 : 4

# Omotetia



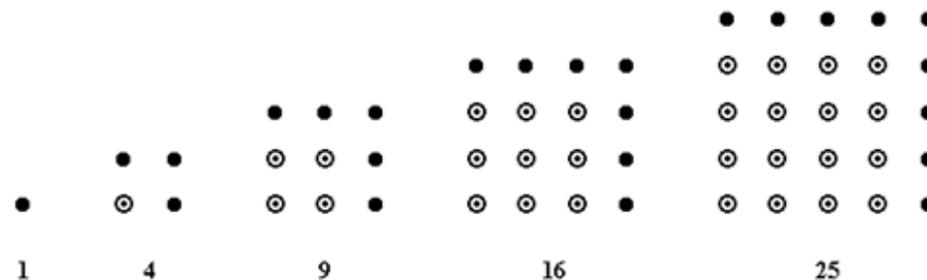
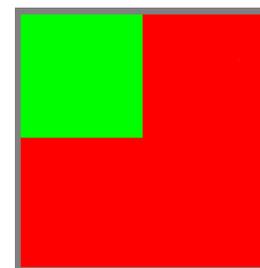
Mathesis Rozzano, 23/04/2020

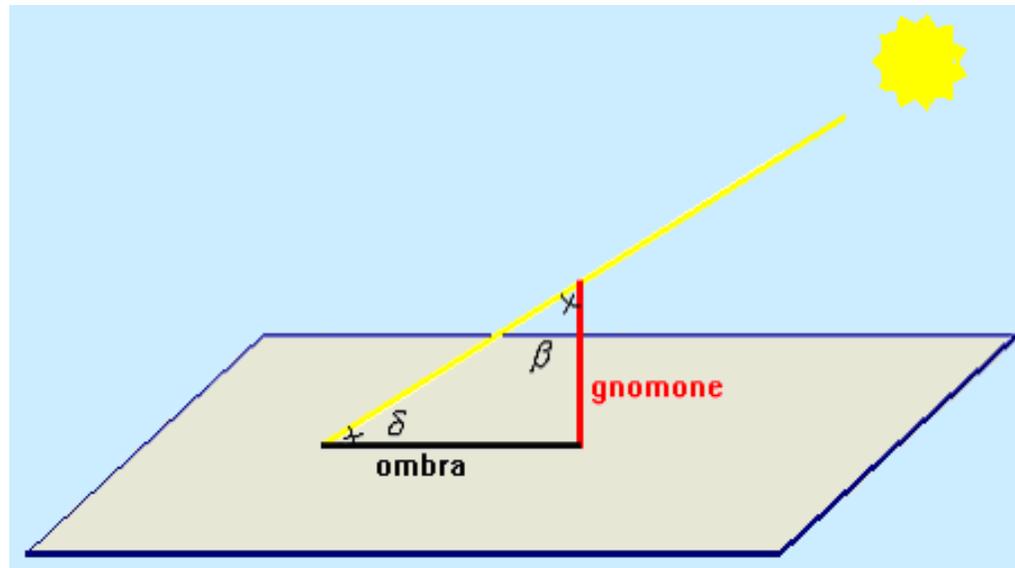
conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte



# Gnomon

Erone di Alessandria:  
 “gnomone è ... ciò che, aggiunto ad un'altra entità, numero o figura, rende il tutto simile a questa entità”

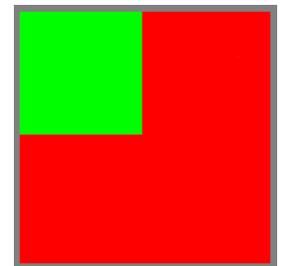


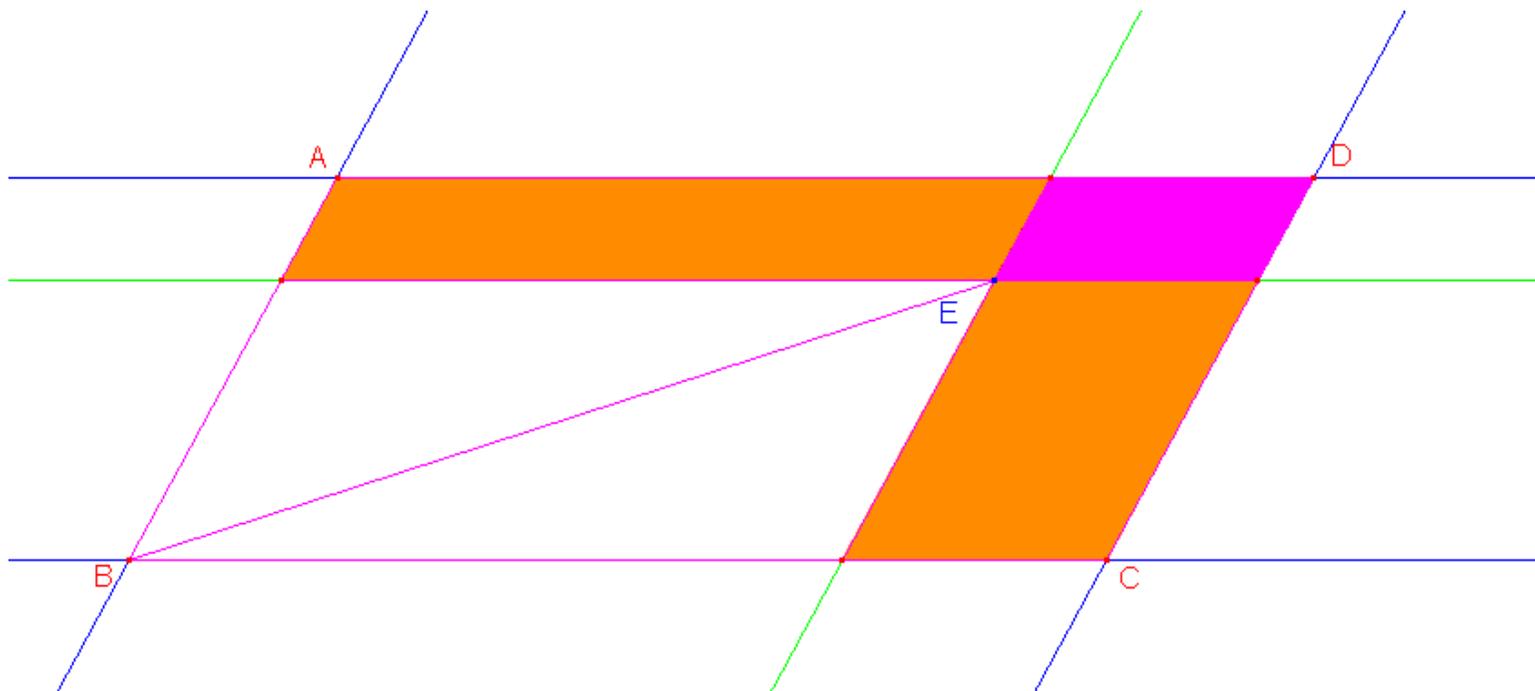


## Enciclopedia Treccani

«Stilo o indice di opportuna lunghezza e conveniente orientazione, la cui ombra serve a segnare le ore negli orologi a sole o meridiane»

In geometria, la parte rimanente di un quadrato di lato assegnato, dal quale si toglie un quadrato di lato minore con uno dei vertici in comune.





“Si chiama gnomone, in ogni parallelogramma, uno qualsiasi dei parallelogrammi posti intorno ad una sua diagonale insieme con i due complementi”

(definizione 2, Libro II, Elementi di Euclide)

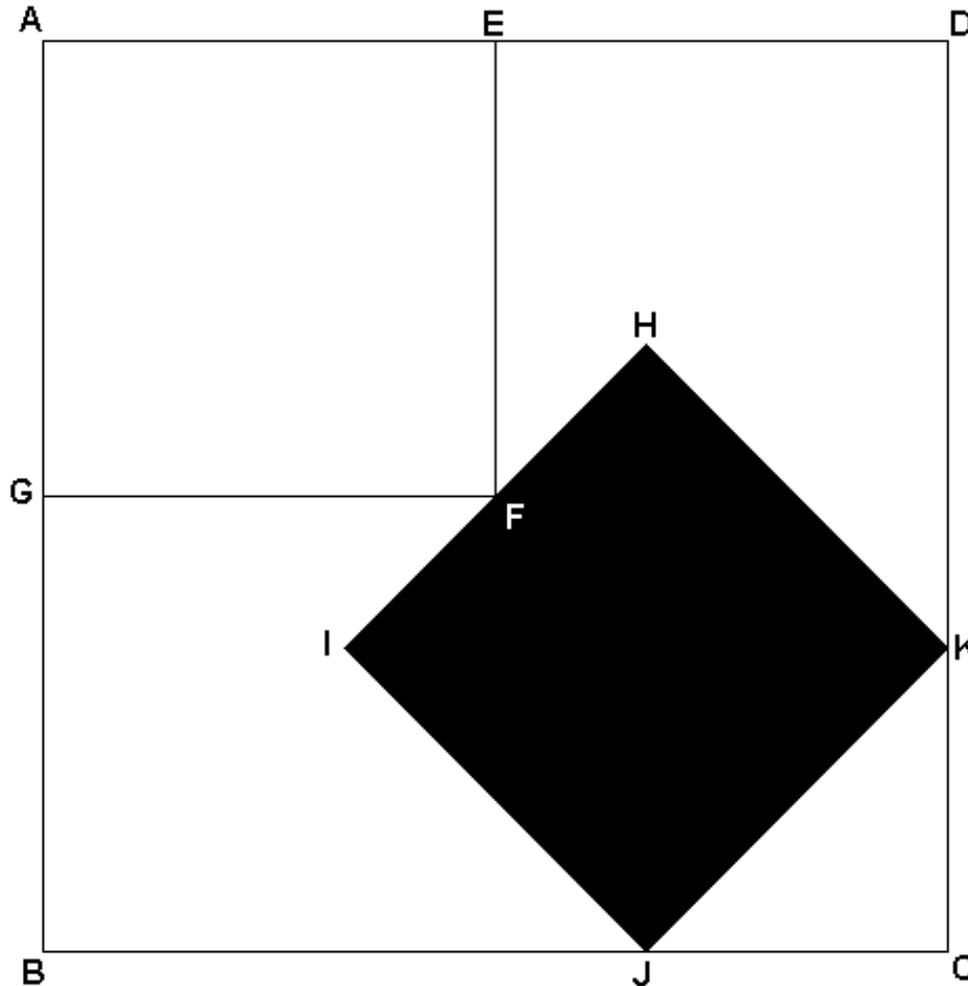
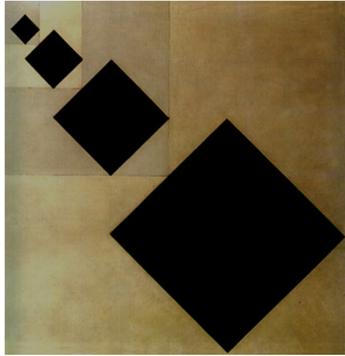


Mathesis Rozzano, 23/04/2020

Paolo Zellini  
Gnomon  
Una indagine sul numero

“La tecnica di crescita  
(o decrescita) di figure spaziali  
come strumento di generazione di numeri  
ha finito col rappresentare non solo un momento iniziale,  
ma la chiave stessa del modo di concepire  
il numero e la misura in Occidente”.

prof. Paola Vighi: *Matemartistica: come promuovere la  
conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte*

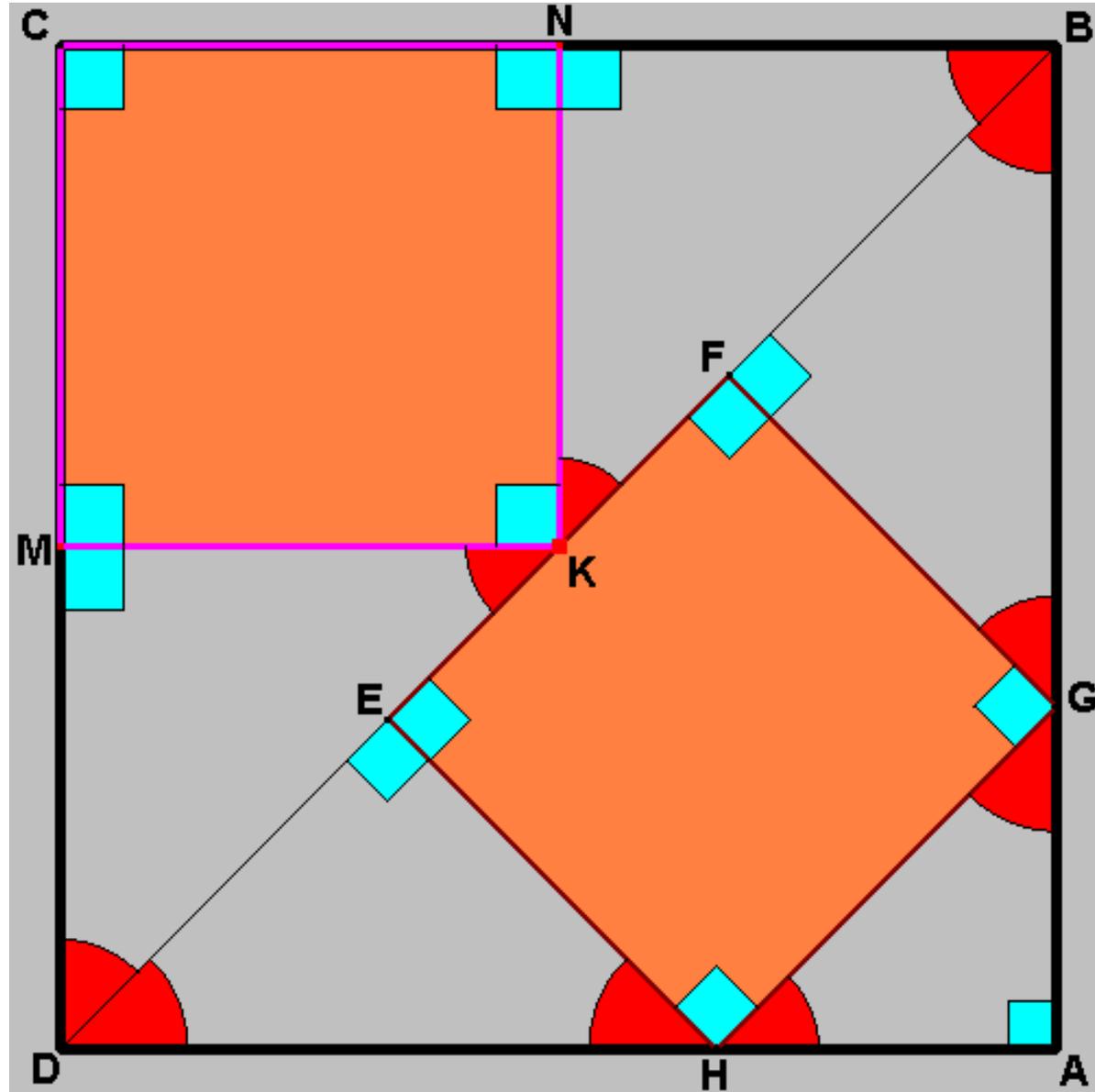


Il quadrato ABCD contiene due quadrati AGFE e HIJK, uno “dritto” e uno “storto”, tangenti in un solo punto F.

I due quadrati AGFE e HIJK sono uguali?

Il segmento HI giace sulla diagonale BD oppure no?

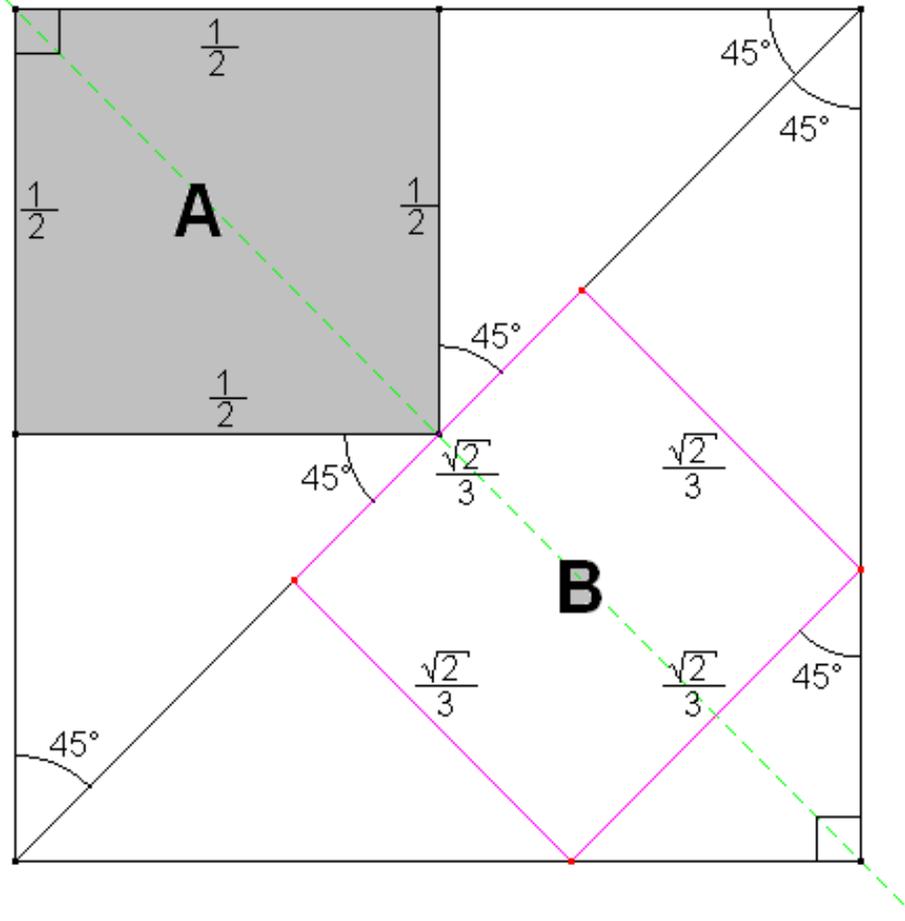
Studio  
dal punto di vista  
geometrico



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vigni: *matemartistica*: come promuovere la  
conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

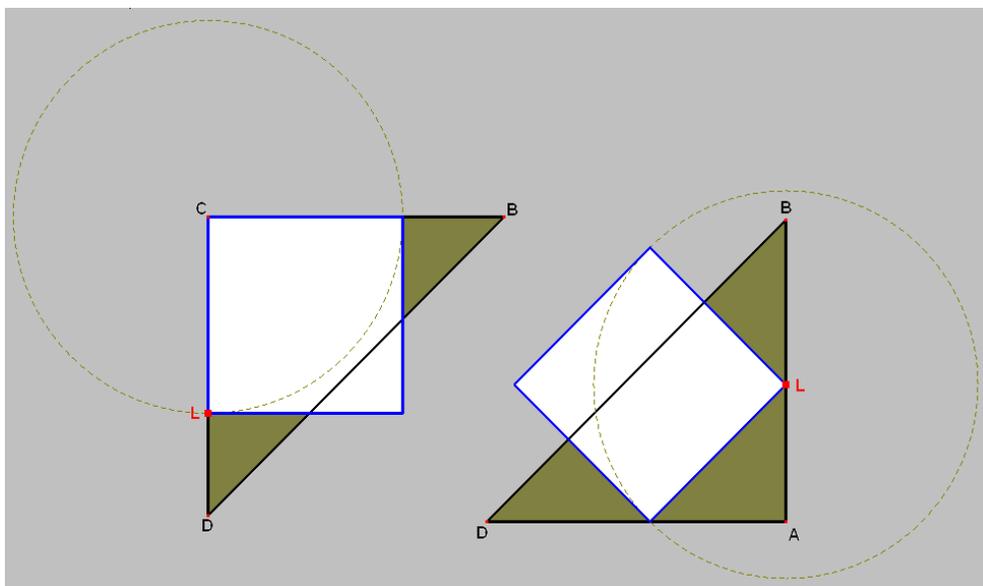
Studio  
dal punto di vista  
aritmetico



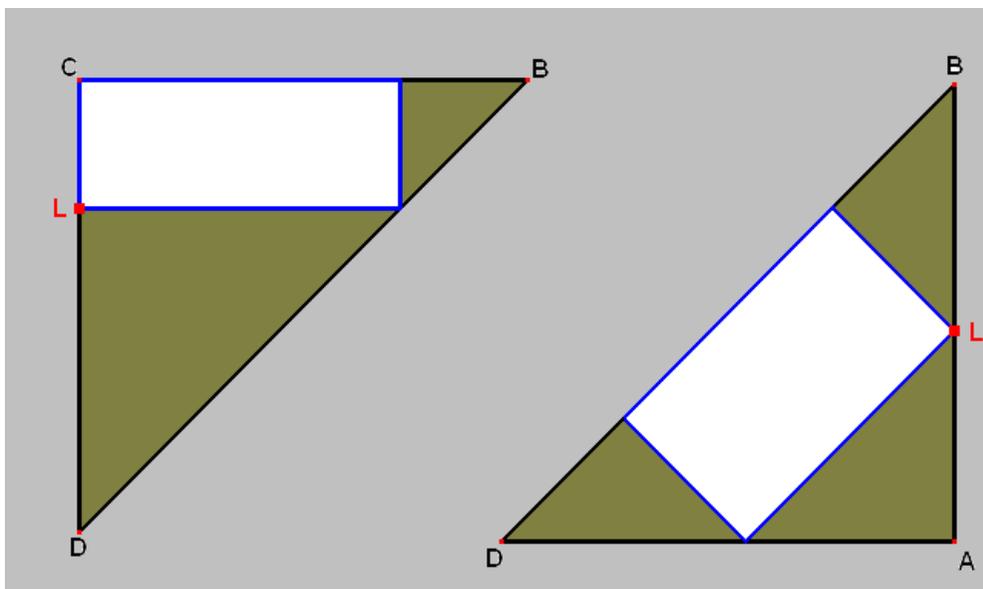
Dunque **se** i due quadrati  
si toccano in un solo  
punto che sta sulla  
diagonale **allora** non sono  
congruenti

**NON POSSONO AVERE  
LA MEDESIMA  
SUPERFICIE**

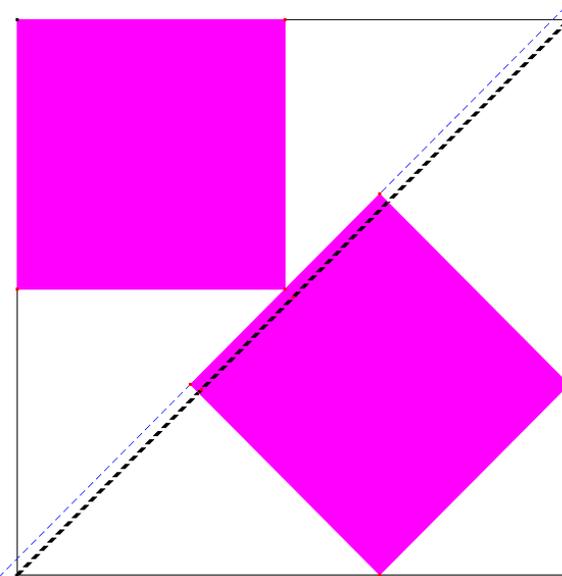
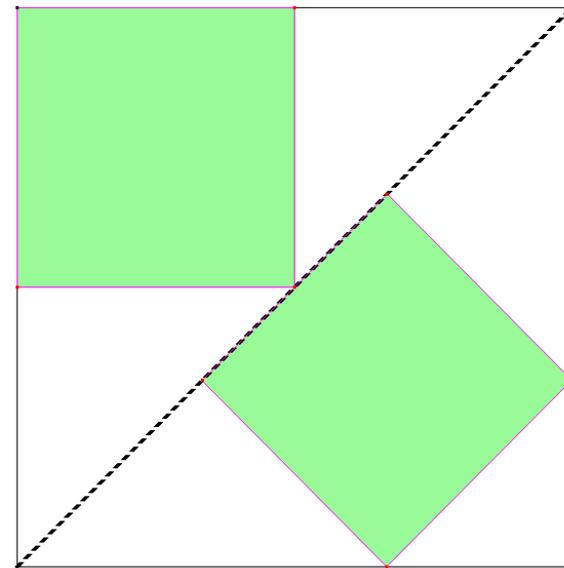
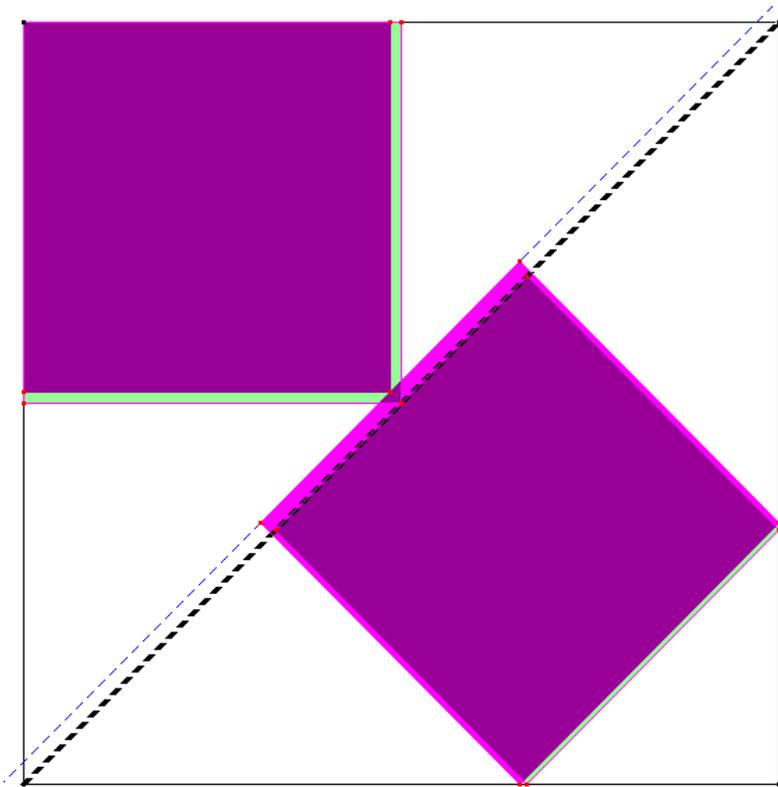
Per quadrati



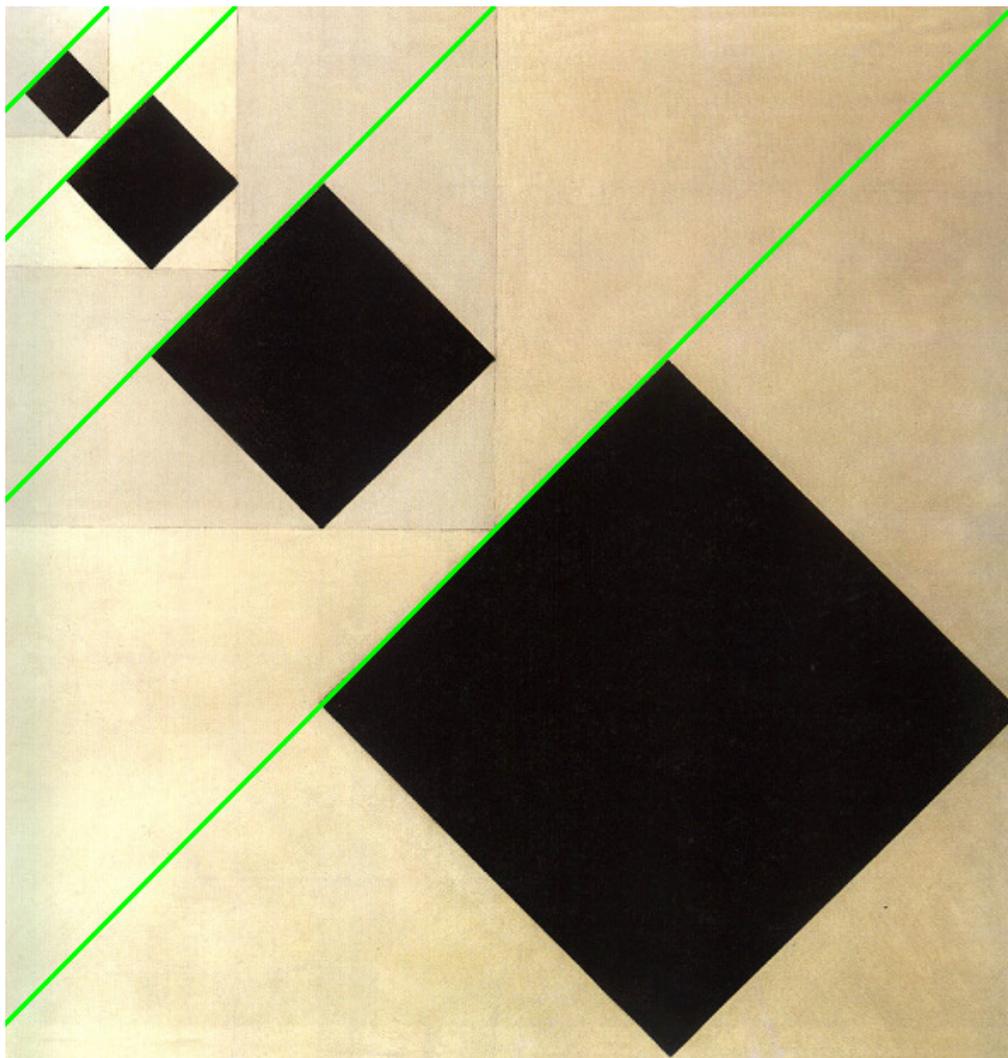
Per rettangoli



... dunque ...



## Una conferma del sospetto



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

# GRAZIE PER L'ATTENZIONE



Mathesis Rozzano, 23/04/2020

prof. Paola Vighi: Matemartistica: come promuovere la conoscenza di concetti matematici attraverso l'arte

Prove INVALSI: [www.gestinv.it](http://www.gestinv.it)

[www.rivistaddm.ch](http://www.rivistaddm.ch)

<https://rsddm.dm.unibo.it>

L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate  
Centro Morin

Versione dinamica di 'Soft Hard'

[https://www.youtube.com/watch?v=EQV\\_AYmQLDQ](https://www.youtube.com/watch?v=EQV_AYmQLDQ)