Anna Maria Facenda, Paola Fulgenzi, Janna Nardi,
Floriana Paternoster, Daniela Rivelli, Daniela Zambon

(Sezione Mathesis Pesaro)

Introduzione

Riflessioni sulla costruzione della conoscenza matematica

In una impostazione "tradizionale" della didattica, applicabile a qualsiasi disciplina, la relazione tra gli attori del processo di insegnamento/apprendimento è rigida ed unidirezionale; il sapere viene "trasmesso" –la scelta del verbo non è casuale- dal docente all'alunno. Quest'ultimo ha un ruolo del tutto passivo e, in quanto tale, di fatto marginale: ascolta, comprende (*se comprende)*, studia, memorizza, applica. I limiti di questo modello pedagogico sono ormai riconosciuti ed è in atto un diffuso movimento di ricerca di strategie di insegnamento che consentano di superarlo. La didattica della matematica non è rimasta estranea a questa spinta innovativa, soprattutto nella fascia scolare dell'obbligo; oggi è convinzione diffusa che la conoscenza matematica, almeno nelle sue prime e fondamentali tappe, non si "subisce" ma si "costruisce". Ciò può avvenire al meglio in un contesto che dia spazio alla ricerca di problemi, alla scoperta, all'esplorazione di situazioni nuove, alla formulazione e verifica di congetture; è fondamentale, inoltre, la dimensione sociale in cui tali approcci si verificano. Il triangolo didattico insegnante –alunno- sapere comporta relazioni reciproche e bidirezionali, che influenzano in profondità anche il "contratto didattico".
In un ambiente di apprendimento policentrico ed interattivo, l'alunno si fa produttore di conoscenza; ne può discendere un rafforzamento della motivazione ad apprendere, sostenuto anche dal dialogo/confronto con i pari. Le interazioni sociali all'interno dei processi di apprendimento permettono all'alunno di "oggettivare il sapere" e quindi di costruire il senso dei contenuti concettuali. "Restituire la parola" all'alunno significa inoltre, per l'insegnante, disporre di occasioni preziose per verificare subito l'eventuale stabilirsi di misconcezioni.
Ci sembra anche opportuno sottolineare, in questa breve riflessione introduttiva, che la matematica è essenzialmente una attività del pensiero rivolta alla individuazione e formulazione di problemi, nonché alla ricerca di soluzioni; citando Duval: "..in matematica bisogna non solo capire per imparare ma *capire in modo da imparare ad imparare*[1], cioè diventare capaci di porre nuove domande, di trovare mezzi di esplorarle,…".
Un modello pedagogico che riconosca la centralità del ruolo dell'alunno nella costruzione del suo sapere ha evidentemente, al suo interno, ampi spazi per l'utilizzo –in funzione euristica- di materiali didattici, sussidi, modelli concreti. Ciò non fa altro che rispettare i tempi naturali di maturazione del pensiero astratto; la manipolazione (in senso ampio, quindi anche mediata dal computer) sul concreto stimola e favorisce la creazione di "oggetti mentali" e questi, a loro volta, in un processo di retroazione forniscono spunto per nuove "concretizzazioni". Nel frattempo l'allievo rafforza le proprie immagini mentali mentre riflette sull'esperienza percettiva e ne scopre i limiti inevitabili.
In questo contributo, e nei successivi, presentiamo alcuni spunti di lavoro che prevedono l'uso integrato e parallelo di due tipi di sussidi: a) il Software Cabri II plus; b) i modelli dinamici. Il primo non ha bisogno di presentazioni, e ha già una ricca bibliografia di riferimento; i modelli dinamici sono artefatti con uno o più elementi mobili, costruiti dagli alunni con materiali semplici, seguendo le indicazioni (orali o sotto forma di scheda guida) dell'insegnante. A partire dalle prime preziose indicazioni di Emma Castelnuovo, il nostro gruppo ha ideato, prodotto e sperimentato parecchie decine di modelli (prevalentemente geometrici, ma non solo); più volte sono stati esposti in mostra e vengono utilizzati abitualmente dai docenti che ci affiancano nelle attività di ricerca e sperimentazione. Maggiori particolari sui materiali utilizzati e sulle metodiche di costruzione sono riportati in Appendice, dove presentiamo le schede di costruzione. Nei paragrafi successivi

[1] Il corsivo è dell'autore

analizzeremo in maniera più ampia e approfondita le caratteristiche e le potenzialità di questi materiali.

Quadro teorico di riferimento

L'ipotesi di base delle nostre proposte è che gli oggetti della matematica sono accessibili solo attraverso le loro rappresentazioni, che dipendono da una attività semiotica. Tale caratteristica è un punto cruciale nel rapporto allievo/matematica ed è all'origine di gran parte delle difficoltà nell'apprendimento di questa disciplina. La questione delle rappresentazioni e dei "passaggi" (o conversioni) da una all'altra è ampiamente analizzata nei lavori di Duval; vogliamo qui sottolineare che sia i modelli dinamici sia le figure Cabri sono rappresentazioni di oggetti matematici, in particolare geometrici. Essi si inseriscono nella dialettica tra componente figurale e componente concettuale del pensiero geometrico, ad un livello diverso rispetto al disegno. Quest'ultimo, i modelli e le figure Cabri sono tutti materiali di scoperta e di lavoro: sono sistemi di segni e mezzi per costruire concetti; sono elementi della realtà e quindi partecipano della sua concretezza. Modelli e figure Cabri hanno però in più la dimensione del movimento, che li arricchisce di una valenza didattica ulteriore. Infatti, come fa rilevare C. Laborde "la dualità invariante/variabile è l'essenza di tutta la matematica, geometria compresa". Nella geometria carta-e-matita, la variabilità degli oggetti geometrici non può emergere, per la staticità insita nelle rappresentazioni iconiche tradizionali. Ciò comporta almeno due ordini di difficoltà per l'allievo: a) porta ad attribuire alla figura geometrica proprietà che non la caratterizzano e non le appartengono (ad esempio la sua posizione in relazione al foglio da disegno); b) ostacola la comprensione del valore generale di teoremi e proprietà (ad esempio, una certa proprietà "vale" solo per il triangolo disegnato ..). Una presentazione dinamica della geometria può far interiorizzare agli allievi il carattere intrinsecamente variabile degli oggetti della geometria ed esaltare di conseguenza le invarianti relazionali. Inoltre, nel momento della esplorazione attiva del modello dinamico e/o della figura Cabri, il movimento può anticipare l'evoluzione del pensiero o accompagnare la formulazione di una congettura; a nostro avviso, e sulla base delle esperienze condotte in classe, tali caratteristiche possono facilitare lo stabilirsi di reti concettuali che siano da una parte ricche e solide e dall'altra più duttili e quindi adattabili a contesti anche diversi.
Infine, vogliamo sottolineare brevemente una caratteristica comune ai modelli dinamici e a Cabri, che a nostro avviso ha una ricaduta non banale sull'azione del docente nel momento in cui progetta un percorso di apprendimento per scoperta: ambedue gli strumenti didattici sono artefatti umani e pertanto incorporano delle conoscenze. Queste sono più immediatamente trasparenti nel caso del modello, in quanto l'alunno lo ha costruito personalmente e, almeno nei primi approcci, meno complesse. In Cabri, le conoscenze incorporate sono il sapere matematico (geometria euclidea) che è alla base del suo funzionamento. In ambedue i casi, comunque, si verifica una interazione tra strumento ed allievo che comporta una retroazione significativa del mezzo sul soggetto che lo utilizza; l'allievo può trasferire le conoscenze apprese attraverso la mediazione dell'artefatto nella produzione di un nuovo artefatto, sia esso un nuovo modello oppure una nuova figura Cabri.

Utilizzo integrato di modelli dinamici e Cabri

La nostra esperienza, sia diretta in quanto docenti di classe, sia parzialmente mediata come docenti ricercatori che affiancano in classe altri colleghi, ci permette di puntualizzare alcuni aspetti non secondari dell'integrazione modelli/Cabri nella didattica della geometria. In primo luogo, per eliminare qualsiasi equivoco, ci sembra essenziale chiarire che le nostre attività, e di conseguenza la nostra analisi, si basano su un presupposto metodologico fondamentale: che i due strumenti citati non vengano utilizzati come delle "lavagne potenziate". Il loro inserimento nella classe prevede invece l'attivazione di modalità di lavoro di tipo laboratoriale, all'interno di un modello pedagogico che modifica in profondità le relazioni tra alunno, insegnante e sapere e stabilisce di conseguenza un contratto didattico fondato sulla partecipazione, la condivisione delle scoperte e delle difficoltà,

la rivalutazione didattica dell'errore come momento di discontinuità potenzialmente fecondo di nuove acquisizioni strumentali e concettuali.
Ciò premesso, esaminiamo sinteticamente quelle che sono, a nostro avviso, le caratteristiche comuni ai due strumenti didattici:

- Focalizzano l'attenzione sul processo (e non solo, o non prioritariamente, sul prodotto); ciò rappresenta un elemento di novità rispetto al contratto didattico tradizionale. L'obiettivo del lavoro non è più formulato in termini di "applicazione", ad esempio di procedure o regole provenienti da una fonte esterna all'allievo, bensì in termini di formulazione o verifica di congetture/proprietà/teoremi. Pertanto è possibile, e spesso necessario, un contatto ripetuto con il problema, attraverso il ritorno su situazioni precedentemente analizzate per rivederle in altra luce o per utilizzarle come fonte di idee.
- Permettono di enunciare proprietà associate alla manipolazione/modificazione dell'oggetto geometrico con costruzioni verbali del tipo "se …allora…"; ciò crea un legame di tipo causa-effetto tra la modificazione esercitata sul modello/figura –che concretizza una condizione- e la conclusione che appare nel momento in cui la condizione è soddisfatta. E' vero, come rileva C. Laborde nella sua analisi in proposito riferita a Cabri, che la relazione causa-effetto non è intrinseca al pensiero matematico; tuttavia è possibile che nel percorso verso la comprensione del concetto il pensiero causale giochi un ruolo significativo.
- Consentono una attività di esplorazione attiva di proprietà e relazioni, grazie alla dinamicità e alla flessibilità delle figure; queste caratteristiche svincolano le situazioni problematiche dall'usuale riferimento ai contesti di misura. Questi sono sempre recuperabili (Cabri ha delle funzioni specifiche ed è comunque possibile eseguire misure su un modello, in quanto oggetto concreto) ma certamente non sono più il riferimento obbligato per l'attività di problem solving.
- Generano condizioni di lavoro favorevoli al problem posing. La retroazione da strumento ad allievo, che abbiamo citato nel paragrafo precedente, non è semplicemente di tipo giusto/sbagliato; essa si risolve in uno stimolo al pensiero divergente: costruzione di una nuova figura Cabri o di un nuovo modello – o di varianti rispetto a quelli noti- che siano idonei a verificare una congettura inesplorata o a fungere da controesempi.
- Sono flessibili e quindi adattabili a situazioni didattiche diverse: livello scolare, caratteristiche della classe, organizzazione del lavoro. Si possono progettare segmenti di curricolo di ampiezza e approfondimento variabili, anche prevedendo attività leggermente differenziate all'interno della classe.

Nella progettazione di un percorso integrato Cabri-modelli dinamici è naturalmente essenziale tenere ben presenti anche le specificità dei due strumenti, che possono tradursi in complementarietà grazie ad una accurata progettazione della situazione didattica:

- I modelli sono concreti, "si toccano", sono addirittura un prodotto della manualità degli allievi. Una volta acquisite le tecniche di costruzione, che sono semplici, l'allievo familiarizza immediatamente con il "suo" strumento e ne scopre facilmente le potenzialità ed i limiti, anche fisici. Le figure Cabri, al contrario, hanno già incorporato il sapere matematico e sono astratte e virtuali; per costruirle l'allievo deve prima apprendere le funzioni base e le modalità di uso del software; in caso contrario, il suo utilizzo sarebbe casuale e di conseguenza improduttivo.
- L'alunno deve assimilare in Cabri il ruolo del trascinamento come strumento di validazione; è stato dimostrato che l'accettazione del valore validante del trascinamento non è né facile né spontanea. Con i modelli dinamici, la validazione/invalidazione passa attraverso modalità diverse: può avvenire attraverso l'osservazione dei casi-limite offerti dal modello stesso o di altri modelli che assumono il ruolo di controesempi o di esempi di appoggio, a seconda dei casi.
- Il modello ha dei limiti fisici che possono impedire la visualizzazione di alcune delle immagini mentali generate dal movimento. Cabri ha potenzialità più ampie, pertanto offre all'allievo una libertà maggiore nella ricerca e nella esplorazione di situazioni geometriche significative.

Per quanto riguarda i tempi di utilizzazione in classe, il confronto tra le caratteristiche dei due strumenti di lavoro ci porta a concludere che, in generale, l'attività con i modelli va realizzata prima di quella con Cabri; questa si svolge infatti ad un livello di astrazione più elevato, richiede la padronanza della sintassi del software e l'accettazione di uno strumento di validazione (il trascinamento) il cui valore all'interno di un contesto "sperimentale" è comunque fondato su teoremi e proprietà della geometria euclidea.

Modelli dinamici e Cabri per definire e classificare

Come abbiamo messo in rilievo nel quadro teorico, le attività di osservazione, manipolazione, validazione che si effettuano con i modelli dinamici e con il software fanno emergere varianti ed invarianti e relazioni di necessità e sufficienza. Si creano condizioni idonee all'organizzazione gerarchica delle tipologie di figure e alla individuazione delle relazioni che le connettono. E' possibile quindi arrivare, senza forzature, alla formulazione di definizioni, non "subite" passivamente dall'alunno bensì da lui stesso elaborate come punto di arrivo di un processo di costruzione concettuale. Nel corso di tale processo, l'alunno costruisce, osserva, individua e seleziona proprietà necessarie e sufficienti, le enuncia, verifica la possibilità di formulare per lo stesso "oggetto" geometrico più definizioni alternative tutte ugualmente valide. La rete di relazioni tra figure che emerge grazie all'approccio dinamico porta, quasi naturalmente, a stabilire classificazioni di tipo inclusivo. Queste sono più complesse e meno facilmente gestibili dagli allievi rispetto alle classificazioni per partizione ed è veramente arduo, se non impossibile, che l'alunno se ne appropri realmente se le sue immagini mentali – che sono comunque rappresentazioni- collegate alle figure sono statiche.

Visualizzazione e linguaggio

Le attività di costruzione, manipolazione ed analisi che si conducono sia con i modelli dinamici che con le figure Cabri non sviluppano appieno la loro efficacia se non sono costantemente affiancate dalla verbalizzazione; in geometria esistono infatti due registri prevalenti di rappresentazione: la visualizzazione delle forme e l'enunciato di tipo discorsivo: "la comprensione dei contenuti non può avvenire se non con una sinergia tra visualizzazione e linguaggio" (Duval). Durante i loro percorsi operativi, gli alunni vanno costantemente sollecitati a descrivere gli elementi percepiti, giustificare procedimenti e risultati (anche in termini, come si è detto, di "se …allora…"), interagire verbalmente con i compagni e con il docente per argomentare, formulare congetture, pianificare ed esporre possibili modalità di validazione. Queste possono essere concepite in termini di "progettazione di un diverso modello dinamico"o di "costruzione di una nuova figura Cabri ". La discussione collettiva o di bilancio che socializza i risultati al termine della sessione di lavoro rappresenta un'ulteriore occasione di ampliamento della competenza linguistica, di costruzione di significati, di messa alla prova e rafforzamento dei processi logici.

Ruolo dell'insegnante

Appare immediatamente evidente da quanto esposto finora che l'utilizzo dei modelli dinamici e di Cabri, soprattutto se in sinergia ed in modo non episodico, comporta una modificazione significativa del modo di operare dell'insegnante e del suo ruolo durante la "lezione". Questa revisione prevede innanzitutto la conoscenza approfondita sia del modello dinamico da far costruire e utilizzare in classe, sia del problema Cabri da proporre come situazione di partenza. Questa conoscenza prevede: un'analisi *a priori* delle potenzialità e delle difficoltà della situazione problematica scelta; la consapevolezza dei possibili nodi concettuali e operativi suscettibili di errate interpretazioni; la selezione degli obiettivi da privilegiare – tra quelli potenzialmente raggiungibili- restando comunque aperti ad eventuali deviazioni "in corso d'opera", sempre possibili quando si fa uso di strumenti così ricchi ed aperti. In conseguenza di questa riflessione preliminare vanno organizzate le modalità di lavoro in classe; sulla base delle sperimentazioni che abbiamo condotto, ci sembra che un buon equilibrio si raggiunga con gruppi di lavoro, possibilmente omogenei, di 4-5 alunni per i modelli dinamici e con 2-3 allievi per computer nel caso di Cabri. Resta comunque possibile, ed efficace, l'organizzazione individuale dell'attività.

Durante la fase di esplorazione da parte degli alunni è essenziale che il docente resista alla "tentazione" di spingere i gruppi verso la soluzione "giusta", anche se ciò comporta un allungamento dei tempi dei lavoro; l'insegnante non è il depositario del sapere ufficiale, ma il mediatore e la guida di un processo di cui i protagonisti sono comunque gli allievi. Nelle fasi di verbalizzazione, nella discussione di bilancio e nella formulazione del sapere emerso, infine, il ruolo del docente è quello di garantire la correttezza scientifica del lavoro svolto: sottolinea quanto di significativo è stato scoperto o verificato, aiuta gli alunni a dare forma corretta alle proprie conclusioni, fa rilevare connessioni con altri settori e quindi "apre" ad esplorazioni successive.