

Scatole e barche di
carta:
riordiniamo i
divisori e
navighiamo nel
piano cartesiano

Maria Luisa Spreafico

DISMA- Politecnico di Torino

Maria.spreafico@polito.it



Considerazioni preliminari

- Focus su divisori e piano cartesiano; ma verranno dati spunti per attività diverse, modulabili su molte classi.
- I modelli che costruiremo (piramide, girandola e barche) possono ispirare la costruzione di altre lezioni.

Scatole e divisori : scopo

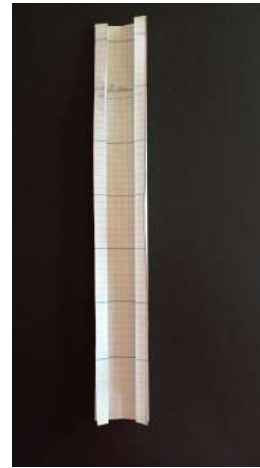
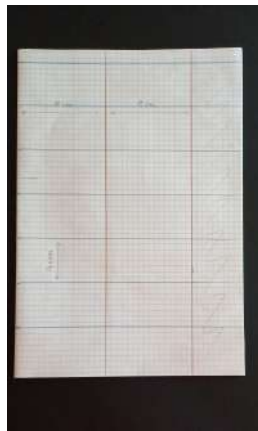
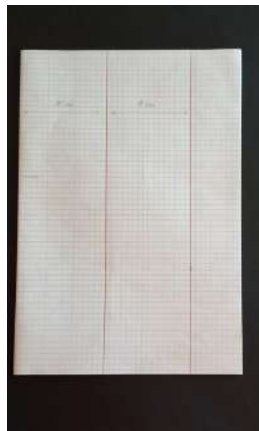
Far sperimentare con modelli origami la possibilità di scomporre un numero naturale N come somma di altri numeri per arrivare alla definizione di divisore, visto come numero abbinato a “scomposizioni particolari” che hanno come elemento della scomposizione sempre lo stesso numero (per es: $6=1+2+3$ ma anche $6=2+2+2= 2 \times 3$). Sarà l'occasione per definire i **divisori**.

L'attività si presta a essere rimodulata per cercare gli **Amici del 10**

Scatole e divisori: le attività

- Attività 1: piegatura delle scatole
- Attività 2: esplorazione delle scatole 1-6 e definizione di divisore
- Attività 3: un poster di piramidi a base esagonali
- Attività 4: ricerca dei divisori di 12

Scatole e divisori- Attività 1: le scatole

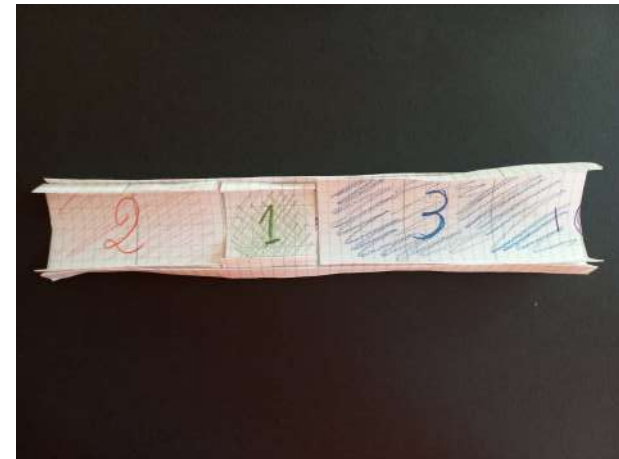


Scatole e divisori - Attività 2: esplorando

N	1	2	3	4	5	6
Quantità di scatole per i divisori di 6	6	3	2	2	2	2

Scatole e divisori - Attività 2: esplorando

Il gioco consiste nello scegliere una scatola base e cercare i modi di rivestirla di scatoline più piccole. Riporteremo i dati in una tabella.



La figura mostra alcune «scatoline» e alcune possibili scomposizioni della scatola che vale 6

Scatole e divisori - Attività 2: esplorando

La tabella mostra le possibili combinazioni di scatoline che “rivestono” quella scelta. Il docente raccoglierà le combinazioni trovate dai gruppi per avere la lista completa (eventualmente aiutando a trovare le combinazioni mancanti). Verranno considerate uguali due combinazioni che usano lo stesso tipo e numero di scatoline, indipendentemente dall’ordine (per es: $2+3 = 3+2$), sottolineando la commutatività della somma.

N	1	2	3	4	5	6
Indica i valori di tutte le scatole che hai usato per ricoprire la scatola di base N	1	1+1 2	1+1+1 1+2 3	1+1+1+1 1+1+2 2+2 1+3 4	1+1+1+1+1 1+1+1+2 1+2+2 1+1+3 2+3 5	1+1+1+1+1+1 1+1+1+1+2 1+1+2+2 1+1+4 1+2+3 1+5 2+2+2 2+4 3+3 6

Scatole e divisori - Attività 2: esplorando

Guideremo gli studenti a fare le seguenti osservazioni:

1) In tutti i casi compare la possibilità di rivestire con **scatoline da 1** e con una copia della **scatola stessa**.

N	1	2	3	4	5	6
Scomposizioni di N: indica i valori di tutte le scatole che hai usato per ricoprire la scatola di base N	1	1+1 2	1+1+1 1+2 3	1+1+1+1 1+1+2 2+2 1+3 4	1+1+1+1+1 1+1+1+2 1+2+2 1+1+3 2+3 5	1+1+1+1+1+1 1+1+1+1+2 1+1+2+2 1+1+4 1+2+3 1+5 2+2+2 2+4 3+3 6

Scatole e divisori - Attività 2: esplorando

2) A volte, ci sono rivestimenti speciali: quelli che usano scatoline dello stesso valore.
 Per esempio, $4=2+2$, $6=2+2+2$, $6=3+3$. In questo caso la somma si può esprimere come un prodotto:
 $4= 2+2 = 2 \times 2$ (volte); $6= 2+2+2=2 \times 3$ (volte); $6=3+3= 3 \times 2$ (volte).

Il valore della scatole uguali usate per rivestire viene detto **DIVISORE di N**.

N	1	2	3	4	5	6
Scomposizioni di N: indica i valori di tutte le scatole che hai usato per ricoprire la scatola di base N	1	1+1 2	1+1+1 1+2 3	1+1+1+1 1+1+2 2+2 1+3 4	1+1+1+1+1 1+1+1+2 1+2+2 1+1+3 2+3 5	1+1+1+1+1+1 1+1+1+1+2 1+1+2+2 1+1+4 1+2+3 1+5 2+2+2 2+4 3+3 6

Scatole e divisori - Attività 2: esplorando

Riscriviamo alcune scomposizioni come prodotto e indichiamo in una riga i divisori di ogni scatola N

N	1	2	3	4	5	6
Scomposizioni di N: indica i valori di tutte le scatole che hai usato per ricoprire la scatola di base N	1	$1+1 = 1 \times 2$ $2 (=2 \times 1)$	$1+1+1 = 1 \times 3$ $1+2$ $3 (=3 \times 1)$	$1+1+1+1 = 1 \times 4$ $1+1+2$ $2+2 = 2 \times 2$ $1+3$ $4 (=3 \times 1)$	$1+1+1+1+1 = 1 \times 5$ $1+1+1+2$ $1+2+2$ $1+1+3$ $2+3$ $5 (=5 \times 1)$	$1+1+1+1+1+1 = 1 \times 6$ $1+1+1+1+2$ $1+1+2+2$ $1+1+4$ $1+2+3$ $1+5$ $2+2+2 = 2 \times 3$ $2+4$ $3+3 = 3 \times 2$ $6 (=6 \times 1)$
DIVISORI	1	1, 2	1, 3	1, 2, 4	1, 5	1, 2, 3, 6

Scatole e divisori - Attività 2: esplorando

Osservazioni:

i) Per tutti i numeri, la scatola 1 può essere scelta per un rivestimento speciale; per esempio:

$$4=1+1+1+1= 1 \times 4(\text{volte}); \quad 5=1+1+1+1+1=1 \times 5(\text{volte}); \quad 6=1+1+1+1+1+1=1 \times 6(\text{volte})$$

1 è detto *divisore banale* di ogni numero N

ii) Per ogni scatola N scelta, può essere usata un'altra scatola N per rivestirla; per esempio:

$$4=4= 4 \times 1(\text{volte}); \quad 5=5=5 \times 1(\text{volte}); \quad 6=6=6 \times 1(\text{volte})$$

N è detto *divisore banale* di N.

iii) Ci sono numeri che ammettono solo 2 divisori: 1 e se stesso.

Sono i **numeri primi**.

iv) Tutti i DIVISORI sono minori (o uguali) al numero stesso.

v) Nelle sequenze di somma, possiamo sempre aggiungere quanti zeri vogliamo (elemento neutro della somma).

Decidiamo di non considerarlo nella tabella

perché darebbe luogo a troppe sequenze banalmente equivalenti.

N	1	2	3	4	5	6
Scomposizioni di N: indica i valori di tutte le scatole che hai usato per ricoprire la scatola di base N	1	1+1 = 1x2 2 (=2x1)	1+1+1 = 1x3 1+2 3 (=3x1)	1+1+1+1 = 1x4 1+1+2 2+2 = 2x2 1+3 4 (=3x1)	1+1+1+1+1 = 1x5 1+1+1+2 1+2+2 1+1+3 2+3 5 (=5x1)	1+1+1+1+1+1 = =1x6 1+1+1+1+2 1+1+2+2 1+1+4 1+2+3 1+5 2+2+2 = 2x3 2+4 3+3 = 3x2 6 (=6x1)
DIVISORI	1	1, 2	1, 3	1, 2, 4	1, 5	1, 2, 3, 6
PRIMI		primo	primo		primo	

Scatole e divisori - Attività 3: piramidi a base esagonale

$1+1+1+1+1+1 = 1 \times 6 = 1+1+1+1+1+1$

$1+1+1+1+2$

$1+1+2+2$

$1+1+4$

$1+2+3$

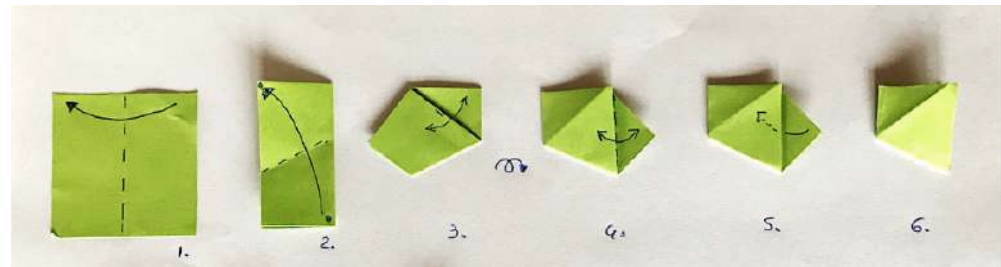
$1+5$

$2+2+2 = 2 \times 3 = 2+2+2$

$2+4$

$3+3 = 3 \times 2 = 3+3$

$6 (= 6 \times 1) = 6$



<https://blog.matematica.deascuola.it/articoli/origami-piramide>

Scatole e divisori - Attività 4: divisori di 12

Possiamo riproporre le scatole (o colorare sul quaderno) per trovare i divisori del numero 12.
Questa volta chiediamo direttamente di scoprire i divisori (cioè il valore uguale delle scatole che riempiono il 12).

Osservazione sugli Amici del 10.

In modo analogo si può lavorare sulle coppie amiche del 10. La scatola da riempire avrà $N=10$ e la regola sarà
Quella di cercare coppie di scatole che la riempiano: $1+9$, $2+8$, ...

Girandole e barche : scopo

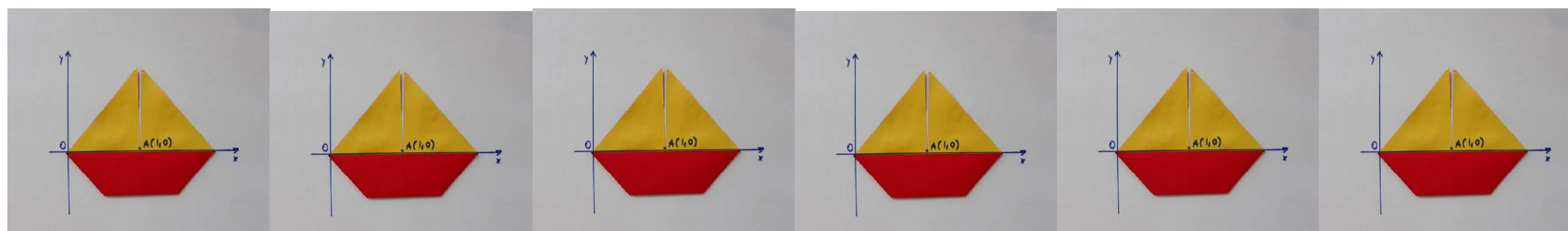
Lavorare in modo simpatico e attivo con le coordinate cartesiane, con contenuti diversi e livelli crescenti di difficoltà.

Girandole- Attività 1: i punti

Girandole- Attività 2: le rette

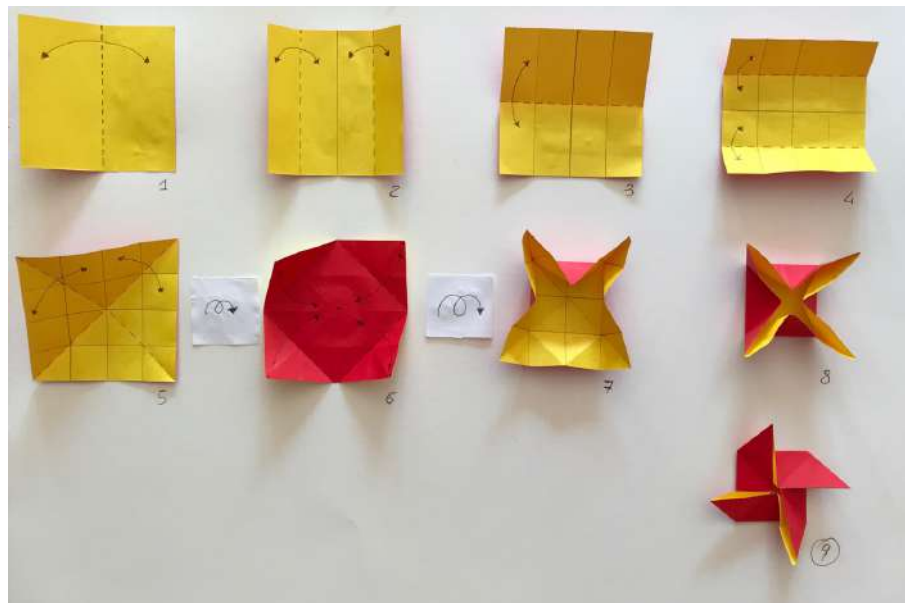
Girandola- Attività 3: le aree (anche senza piano cartesiano)

L'attività si presta a essere rimodulata anche per la scuola primaria (coordinate di punti, simmetrie, scomposizione geometrica delle figure).



Girandole: il modello

Nelle attività sul piano cartesiano, sfrutteremo il significato delle pieghe e la mobilità del modello finale

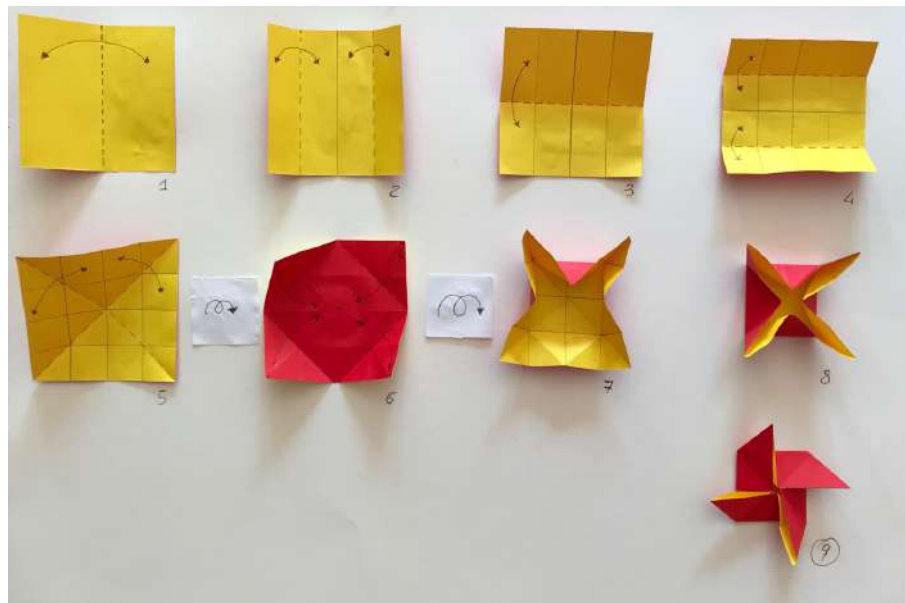


Durante la piegatura osservare:

- in quanti parti viene suddiviso il foglio
- misura dei lati della girandola

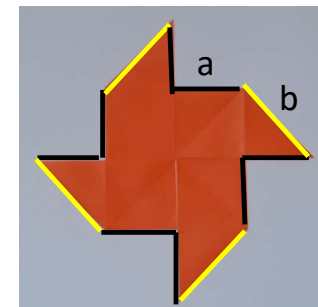
Girandole: il modello

Nelle attività sul piano cartesiano, sfrutteremo il significato delle pieghe e la mobilità del modello finale



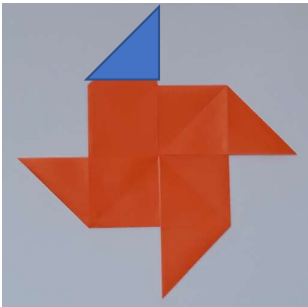
Durante la piegatura osservare:

- in quanti parti viene suddiviso il foglio
- misura dei lati della girandola



Girandole: il modello

Usiamo il modello per: calcolare le coordinate dei punti, osservare come cambiano le coordinate nelle simmetrie, calcolare la distanza tra punti.



Facciamo incollare il modello della girandola su un foglio bianco (la colla va messa solo sotto all'aletta triangolare evidenziata in figura, perché sia possibile usare il modello **dinamicamente**)

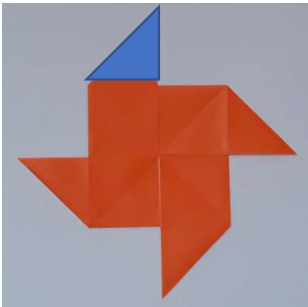
Innanzitutto dobbiamo scegliere un **sistema di riferimento**.

- Origine
- Assi
- Unità di misura

Potremmo inizialmente fare una scelta comune per la classe

Girandole: il modello

Usiamo il modello per: calcolare le coordinate dei punti, osservare come cambiano le coordinate nelle simmetrie, calcolare la distanza tra punti.



Facciamo incollare il modello della girandola su un foglio bianco (la colla va messa solo sotto all'aletta triangolare evidenziata in figura, perché sia possibile usare il modello **dinamicamente**)

Innanzitutto dobbiamo scegliere un **sistema di riferimento**.

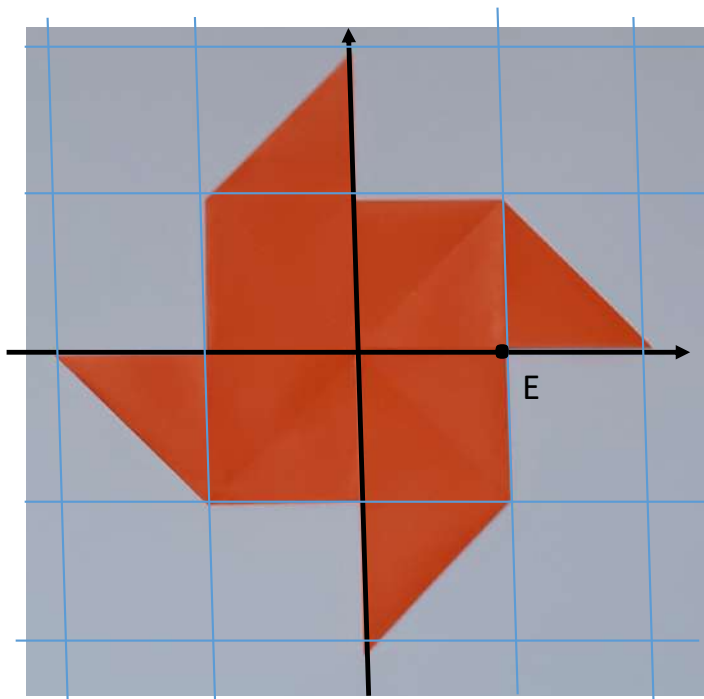
- Origine
- Assi
- Unità di misura

Potremmo inizialmente fare una scelta comune per la classe

Girandole- Attività 1: i punti

Ecco una possibile scelta in cui l'origine è il centro della girandola e gli assi cartesiani si appoggiano alle alette della girandola.

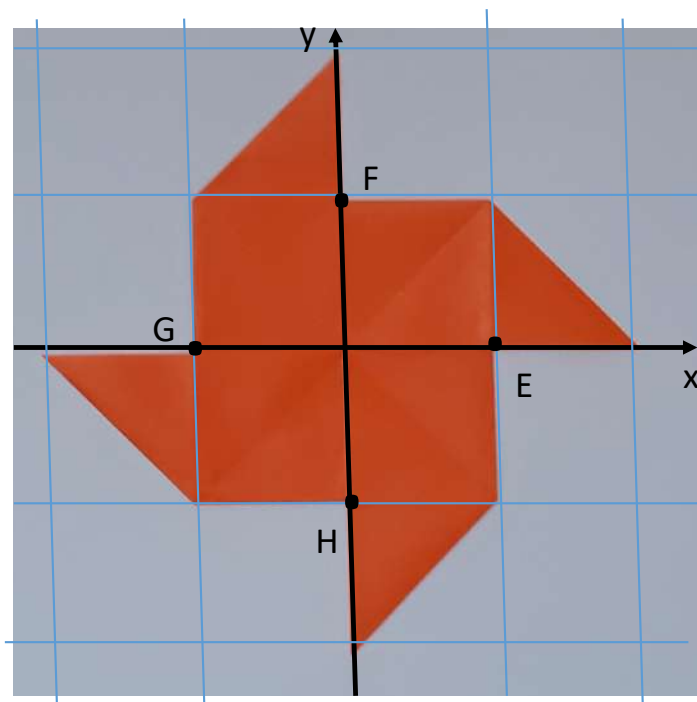
Come unità di misura fissiamo 1 l'ascissa del punto indicato con E in figura.



Facciamo tracciare agli studenti le rette parallele agli assi e passanti per i vertici della girandola

Girandole- Attività 1: i punti

Esercizio 1: calcola le coordinate dei vertici del poligono della girandola.



I punti E, F, G ed H si
Trovano sugli assi coordinati
a distanza 1 dall'origine.

$$E=(1,0)$$

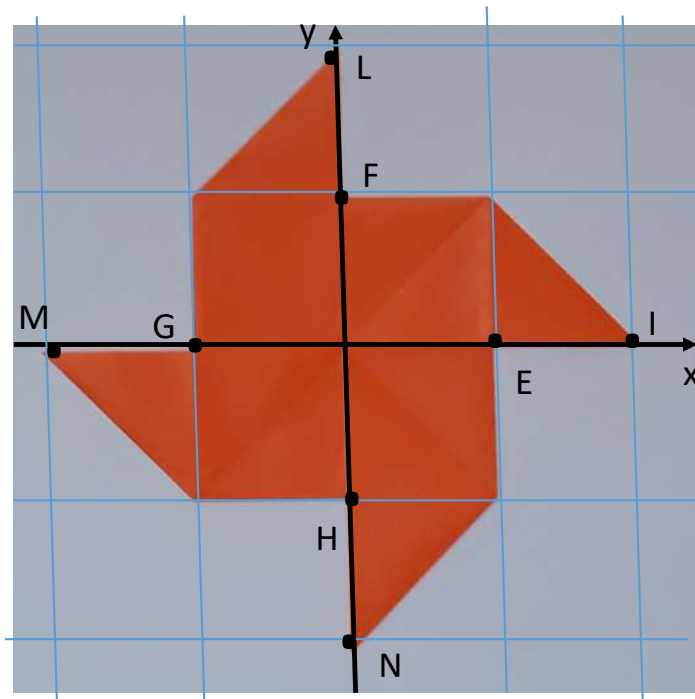
$$F=(0,1)$$

$$G=(-1,0)$$

$$H=(0,-1)$$

Girandole- Attività 1: i punti

Esercizio 1: calcola le coordinate dei vertici del poligono della girandola.



Anche i punti I, L, M, N si trovano sugli assi e distano 2 dall'origine.

$$I=(2,0)$$

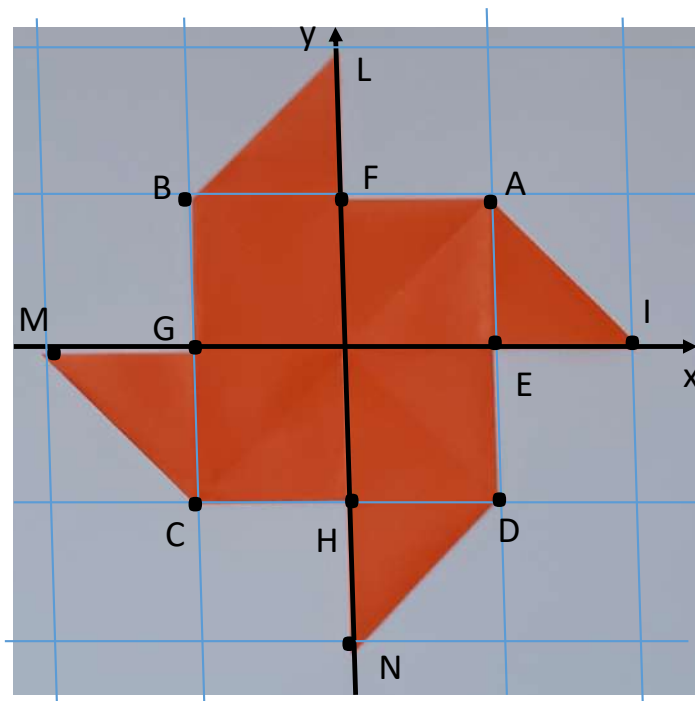
$$L=(0,2)$$

$$M=(-2,0)$$

$$N=(0,-2)$$

Girandole- Attività 1: i punti

Esercizio 1: calcola le coordinate dei vertici del poligono della girandola.



Confrontando con le ascisse e le ordinate dei punti precedenti, si determinano anche le coordinate di

$$A=(1,1)$$

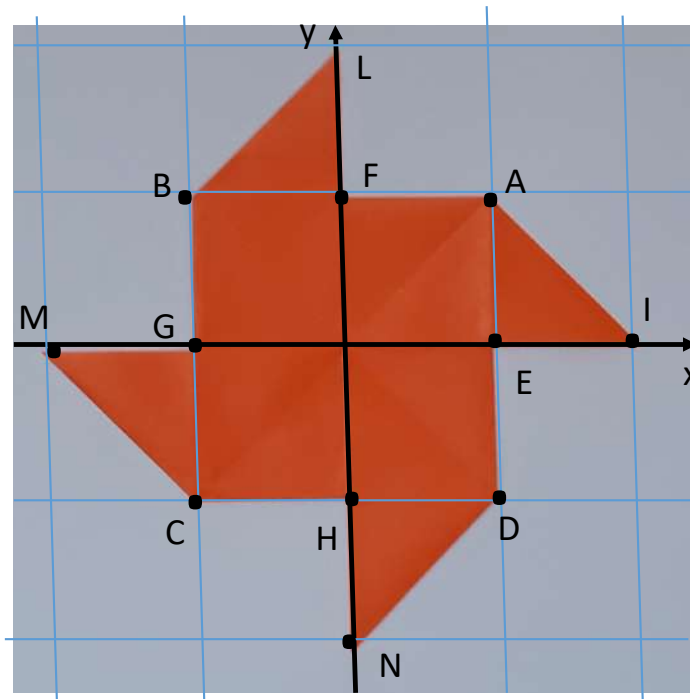
$$B=(-1,1)$$

$$C=(-1,-1)$$

$$D=(1,-1)$$

Girandole- Attività 1: i punti

Esercizio 2: **piega** la diagonale AC e confronta i punti che si corrispondono. Cosa puoi osservare sulle loro coordinate?



I punti A e C rimangono fissi, mentre $D = (1, -1)$ si sovrappone a $B = (-1, 1)$

$I = (2, 0)$ si sovrappone a $L = (0, 2)$

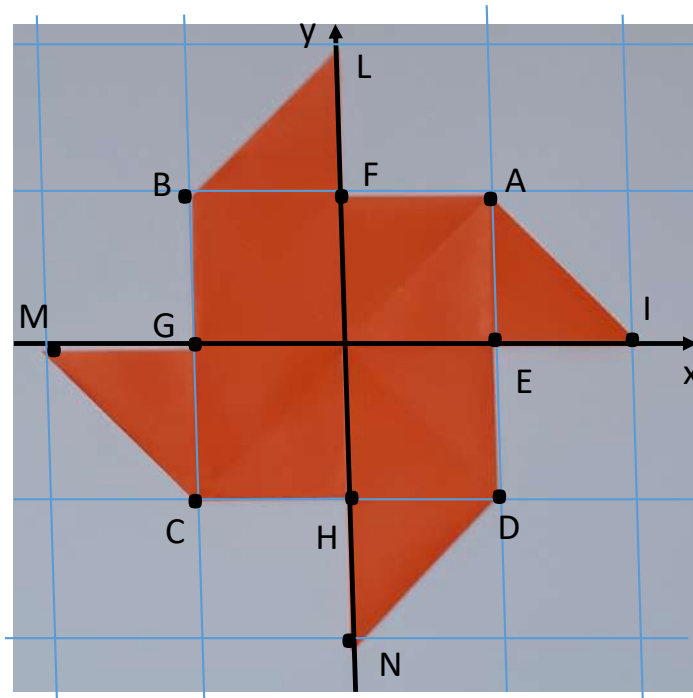
$N = (0, -2)$ si sovrappone a $M = (-2, 0)$

H si sovrappone a G, E ad F

Possiamo osservare che nella simmetria rispetto alla diagonale AC, le coordinate si scambiano

Girandole- Attività 1: i punti

Spunti per ulteriori esercizi



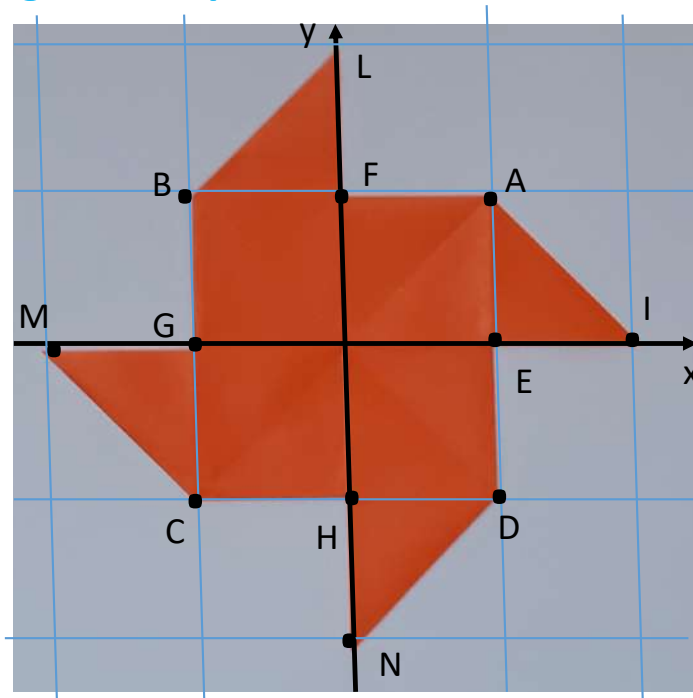
Esercizio 3: **piega** la diagonale BD. Cosa puoi osservare sulle loro coordinate?

Esercizio 4 e 5: ripetere l'esercizio con la **piega** lungo FH, e GE. (simmetria rispetta all'asse delle ordinate e delle ascisse)

Esercizio 6: calcolare la distanza tra alcune coppie di punti

Girandole- Attività 2: le rette

Possiamo usare il modello per fare scrivere alcune equazioni di rette, con difficoltà crescente. Essendo il modello «dinamico», i ragazzi possono **piegarlo** o **ripercorrerlo** con le dita, per rendere tangibili le rette.



Rette parallele agli assi:

- retta per MI, CD, AB
- retta per LN, AD, BC

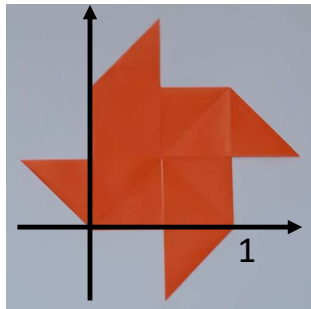
Rette parallele alle bisettrici:

- retta per AC, HE, ND, GF, BL
- rette per BD, GH, MC, FE, AI

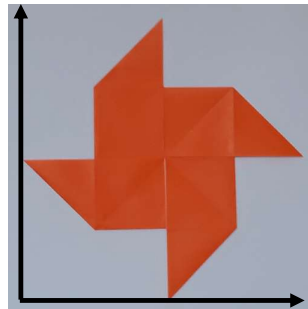
Osserviamo come l'intercetta sull'asse y sia sempre evidente.

Girandole- Attività 1 e 2: cambiamo punto di vista

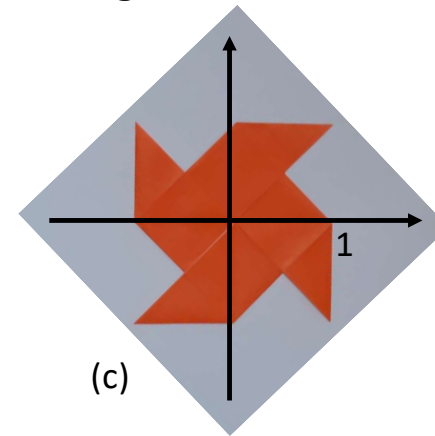
E' possibile anche riproporre gli esercizi precedenti su punti e rette modificando il sistema di riferimento della girandola. Di seguito alcuni esempi.



(a)



(b)



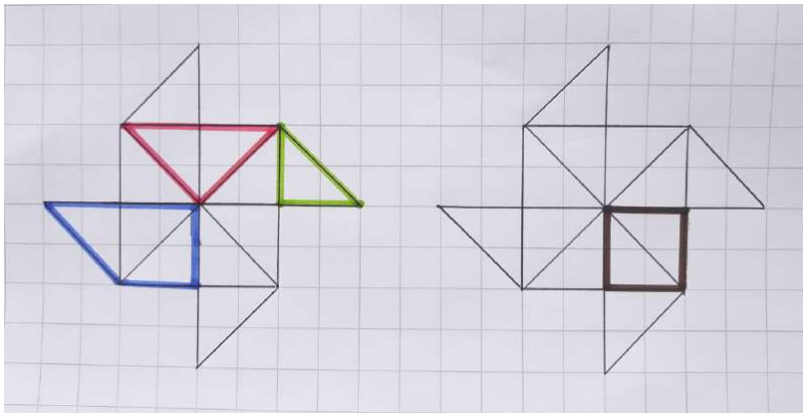
(c)

Osservazioni:

- (a) in particolare è cambiata l'unità di misura;
- (b) i punti hanno coordinate solo positive o nulle;
- (c) alcuni punti hanno coordinate irrazionali.

Girandole- Attività 3: le aree

Possiamo usare la girandola con l'obiettivo di abituare gli studenti alla scomposizione e ricomposizione di poligoni.

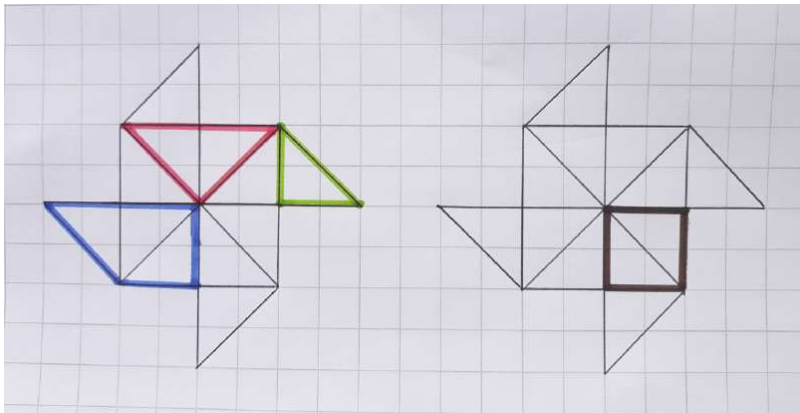


Girandole- Attività 3: le aree

Possiamo usare la girandola con l'obiettivo di abituare gli studenti alla scomposizione e ricomposizione di poligoni.

Esercizio 1: scomponi la girandola utilizzando un solo tipo di poligono

(triangoli, quadrati,...) (I ragazzi potranno ridisegnare la girandola sul quaderno per evidenziare i poligoni)



- 12 triangoli piccoli t (verdi in figura)
- 4 trapezi Tr (blu in figura)
- 6 triangoli grandi T (fucsia in figura)
- 6 quadrati q (neri in figura)

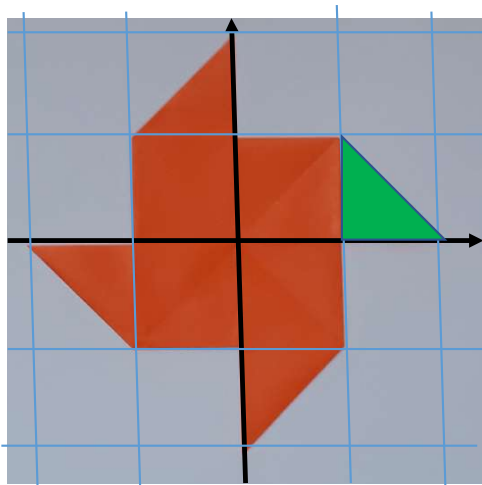
Osserviamo: i) 4 T si ottengono decomponendo il quadrato centrale della girandola + 2 T si ottengono unendo coppie delle alette esterne della girandola. Analoga osservazione per i 6 quadrati.

ii) T e q equiestesi

Girandole- Attività 3: le aree

Facciamo utilizzare le scomposizioni precedenti per calcolare l'area della girandola utilizzando formule diverse e riflettendo su vantaggi e svantaggi delle differenti scelte.

Esercizio 2: calcola l'area della girandola in più modi

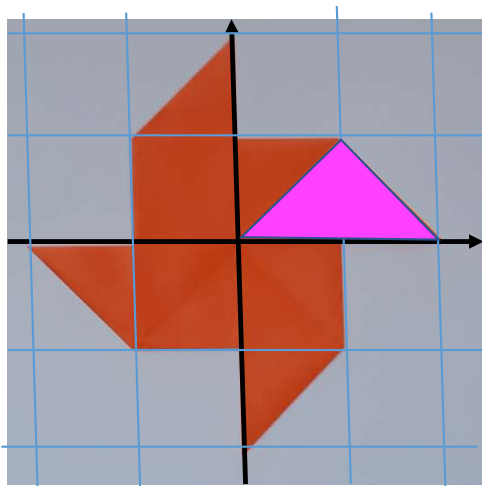


$$A_t = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A_{\text{gir}} = 12 \times A_t = 6$$

Girandole- Attività 3: le aree

Esercizio 2: calcola l'area della girandola in più modi



$$A_t = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

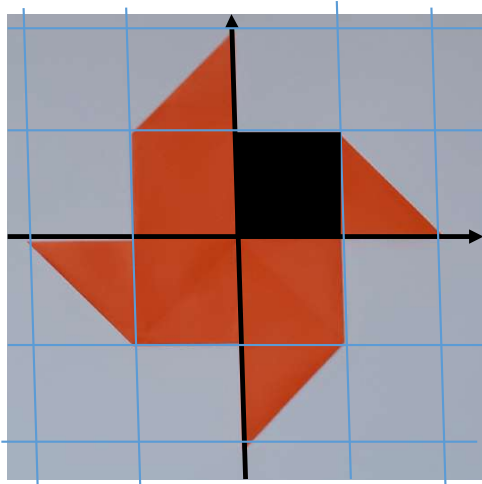
$$A_{\text{gir}} = 12 \times A_t = 6$$

$$A_T = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$A_{\text{gir}} = 6 \times A_T = 6$$

Girandole- Attività 3: le aree

Esercizio 2: calcola l'area della girandola in più modi



$$A_t = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A_T = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$A_q = l \times l = 1 \times 1 = 1$$

$$A_{\text{gir}} = 12 \times A_t = 6$$

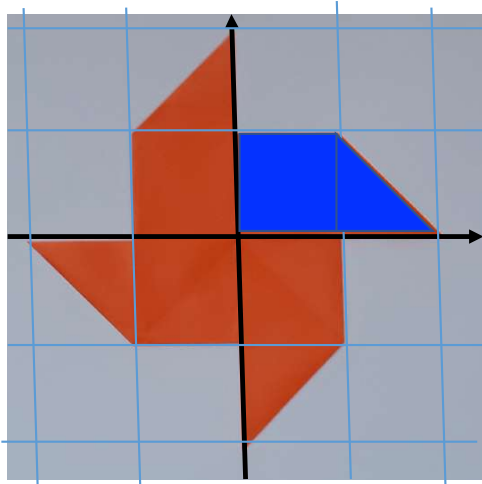
$$A_{\text{gir}} = 6 \times A_T = 6$$

$$A_{\text{gir}} = 6 \times A_q = 6$$

Osserviamo l'equiestensione di T e q.

Girandole- Attività 3: le aree

Esercizio 2: calcola l'area della girandola in più modi



$$A_t = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A_{\text{gir}} = 12 \times A_t = 6$$

$$A_T = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$A_{\text{gir}} = 6 \times A_T = 6$$

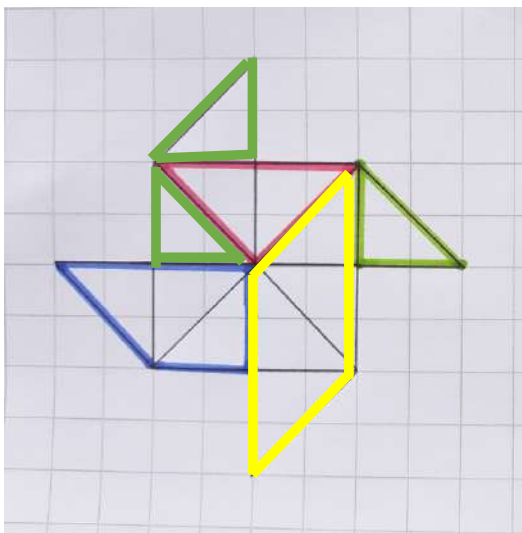
$$A_q = l \times l = 1 \times 1 = 1$$

$$A_{\text{gir}} = 6 \times A_q = 6$$

$$A_{Tr} = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(2+1) \times 1}{2} = \frac{3}{2} \quad A_{\text{gir}} = 4 \times A_{Tr} = 6$$

Girandole- Attività 3: le aree

Possiamo anche permettere ai ragazzi di utilizzare più tipologie di poligoni nella stessa decomposizione. La decomposizione è facilitata ma per il calcolo delle aree andranno utilizzate più formule.



La figura mostra un esempio in cui si sono utilizzati
4 triangoli (3 congruenti e uno simile)
1 parallelogramma
1 trapezio

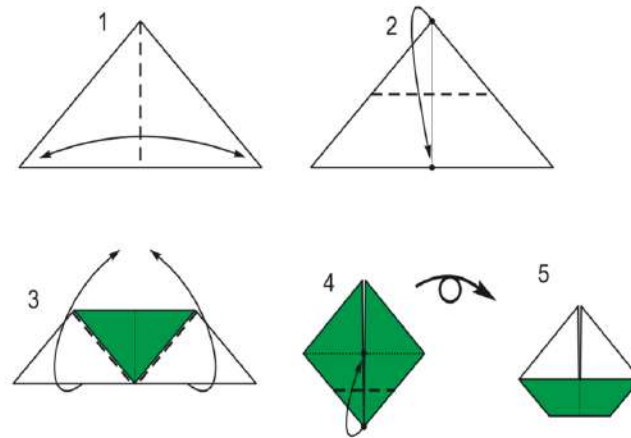
Barche : le attività

Barche- Attività 1,2: i punti e le rette

Barche- Attività 2: GeoGebra

Brache- Attività 3: battaglia navale

Barche: il modello



Anche in questo caso, prima di utilizzare le coordinate, è importante che gli studenti osservino le proprietà sintetiche della figura.

Questo con un duplice obiettivo: da un lato collegare la descrizione sintetica a quella analitica (a volte gli studenti lavorano per compartimento stagni); dall'altro mostrare che l'osservazione delle figure porta ad organizzare meglio le strategie di calcolo.

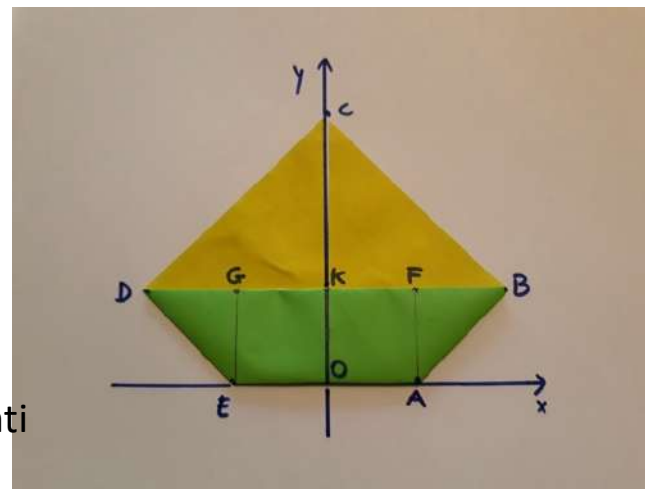
Barche- Attività 1,2: i punti e le rette

Incollare la barca su un foglio a quadretti
(fotocopiare con zoom 125% foglio a quadretti 1cm per barche con cateto 7,5 cm).

Con gli studenti fissate un sistema di riferimento
(origine, asse x e asse y e un'unità di misura).

Calcolare:

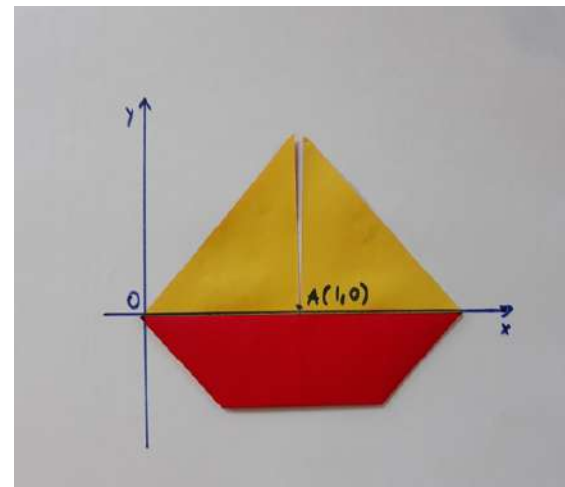
- coordinate dei punti; osservare cosa succede alle coordinate di punti simmetrici
- equazioni di alcune rette formate dalle pieghe della barca o congiungenti punti particolari. Riflettere su parallelismo, perpendicolarità, relazione tra coeff. Angolari di rette simmetriche rispetto agli assi
- coordinate di punti di intersezione di alcune coppie di rette o verificare se alcuni punti appartengono ad una data retta.



Barche- Attività 3: GeoGebra

Un'idea in più: attività con GeoGebra. Ridisegno della figura e verifica delle equazioni ottenute

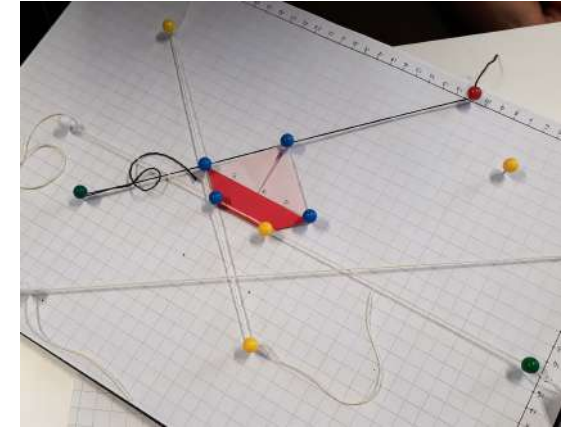
Si possono ripetere gli esercizi proposti sul cambio di coordinate



Barche- Attività 4: battaglia navale

L'insegnante ha posizionato sul suo foglio la sua barca.

Lo scopo è che gli studenti pongano domande per individuare la posizione della barca e replicarla sul loro foglio. Possono usare anche cordini e puntine per tracciare rette.



L'insegnante sceglie a ogni turno lo studente che deve porre la domanda (avendo cura di preferire i più distratti!)

Gli studenti possono fare domande sull'ascissa o sull'ordinata del punto usando disuguaglianze strette o deboli. La domanda deve ammettere come risposta solo «sì» o «no».

Se una squadra, provando a indovinare la posizione, sbaglia, viene squalificata e il gioco prosegue con i compagni. Vince la squadra che indovina per primo la posizione della barca.



Grazie per l'attenzione!