	Titolo	*Livello*	*Origine*	*Ambito*
1	Album di figurine	3 4	SI	Trovare un numero naturale, soddisfacente determinate condizioni, utilizzando le quattro operazioni
2	Michela e le sue sorelle	3 4	RZ	Trovare quattro numeri naturali nota la loro somma e alcune relazioni tra essi
3	Gita scolastica (I)	3 4	BL	Scomporre un numero in addendi uguali a 3 o a 4
4	I braccialetti di Lara	3 4	SI	Individuare la regola di alternanza di due tipi di oggetti in una sequenza e trovare quanti ce ne sono di un dato tipo
5	Quaranta triangoli	3 4 5	LY	Riconoscere una progressione aritmetica e individuarne l'n-esimo termine e la ragione
6	Collage geometrico	4 5 6	GTGP	Confrontare le aree di due gruppi di figure
7	Giochi con le cifre	5 6	LU	Formare due numeri con cinque cifre date, in modo che il prodotto sia massimo
8	Biglie	5 6 7	SI	Trovare due numeri di cui si conoscono somma e differenza
9	Gita scolastica (II)	5 6 7	BL	Scomporre due numeri in addendi uguali a 3 o a 4
10	Decori natalizi	5 6 7	PU	Determinare il numero di oggetti di un certo tipo, nota la spesa in una situazione di offerta speciale
11	Il disegno di Pietro	5 6 7	PR+MI	Calcolare e confrontare le aree di due moduli in una pavimentazione
12	Sul pianeta Alfa	6 7 8	UD	Trovare i nomi di tre personaggi in base a loro affermazioni, sapendo che uno solo dei tre dice la verità
13	Raccolta di frutti di bosco	7 8	SI	Trovare un numero somma di altri quattro non noti di cui si conoscono relazioni reciproche
14	Il puzzle (I)	7 8	MI+FC	Dato un rettangolo diviso in 4 triangoli rettangoli congruenti due a due, disegnare un rettangolo diverso da quello dato formato dagli stessi 4 triangoli e determinarne il perimetro.
15	Scambi di biglie	8 9 10	BB	Determinare le leggi di scambio che modificano *n* oggetti di tipo A in *m* oggetti di tipo B e *s* oggetti di tipo C
16	Figurine da regalare	8 9 10	SI	Trovare le soluzioni intere positive di un'equazione lineare con due incognite
17	Vincere con un dado	8 9 10	FC	Tra due regole di gioco di lancio di un dado, determinare la più vantaggiosa
18	Nastro trasportatore	8 9 10	FC	Trovare la differenza tra due distanze percorse, note alcune informazioni su velocità e tempi

1. ALBUM DI FIGURINE (Cat. 3, 4)

Andrea aveva 74 figurine dei calciatori e qualche settimana fa ha comprato un album per incollarle.

Da allora, ogni settimana, suo fratello Luigi gli ha dato una figurina e sua sorella Anna due figurine.

Tra queste figurine, 6 erano doppioni e quindi non le ha attaccate. Oggi Andrea ha 95 figurine nel suo album.

Quante settimane sono passate da quando Andrea ha comprato l'album?

Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare quante volte occorre aggiungere 3 a 74 per arrivare a 95 + 6.

Analisi del compito

- Comprendere l'enunciato del problema, i dati, la cronologia degli eventi: qualche settimana fa Andrea aveva 74 figurine e ha comprato l'album; oggi Andrea ha 95 figurine incollate sull'album dopo averne scartate 6 perché doppioni. Non si sa quante settimane sono trascorse da quando Andrea ha comprato l'album, ma sappiamo che ogni settimana ha ricevuto un numero di figurine (1 e 2) e che, di conseguenza, la sua collezione è aumentata ogni settimana di 3 figurine.
- Determinare quante figurine Andrea possedeva prima di scartare le 6 che non ha potuto incollare, e aggiungere queste alle figurine dell'album: 95 + 6 = 101. Trovare quindi la differenza tra il numero delle figurine che possiede oggi e quello di quante ne possedeva il giorno in cui ha comprato l'album 101 – 74 = 27.
- Oppure trovare subito la differenza tra il numero delle figurine di oggi e quello delle figurine iniziali (95 – 74 = 21) poi aumentarlo di 6: (21 + 6) = 27.
  - Considerato che il numero totale delle figurine è aumentato di 27 unità e che per ogni settimana trascorsa il numero delle figurine è aumentato di 3, dedurre che sono state necessarie 9 (= 27 ÷ 3) settimane per ottenerlo. Lo stesso risultato può essere ottenuto con una moltiplicazione da completare: 3 × … = 27 o per mezzo di addizioni ripetute.

Oppure

- Dopo aver calcolato il numero delle figurine che possedeva Andrea prima di averne scartate 6, (95 + 6 = 101), partire da 74, aggiungervi 2 e poi 1 e vedere quante volte queste operazioni devono essere ripetute per ottenere 101: 74 + 2 + 1 = 77 ; 77 + 2 + 1 = 80 ; ... ; 98 + 2 + 1 = 101. Concludere che queste operazioni devono essere ripetute per 9 volte e che, di conseguenza, sono trascorse 9 settimane da quando Andrea ha comprato l'album.

Oppure

- Partire da 101 e togliere 3, dal risultato togliere 3, … fino ad ottenere 74 e constatare che questa operazione è ripetuta 9 volte.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (9 settimane) con procedimento chiaro (descritto a parole o con un disegno o con il dettaglio dei calcoli)

3 Risposta corretta ma con procedimento poco chiaro (mancanza di qualche passaggio o calcolo)

2 Risposta corretta senza alcuna descrizione della procedura
oppure risposta errata dovuta ad un errore di calcolo con procedimento corretto

1 Inizio di ragionamento corretto
oppure procedimento corretto per quanto riguarda gli aumenti o le diminuzioni, ma non si è tenuto conto dei 6 doppioni

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Siena

2. MICHELA E LE SUE SORELLE (Cat. 3, 4)

Michela ha tre sorelle: Silvia, Anna e Chiara.

- Silvia ha tre anni meno di Michela,
- Anna ha cinque anni più di Michela,
- Chiara ha due anni più di Anna.

Oggi la somma delle età delle quattro sorelle è 29 anni.

Quanti anni ha oggi Michela?

Mostrate come avete trovato la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare un numero naturale n tale che: $n + (n - 3) + (n + 5) + [(n + 5) + 2] = 29$.

Analisi del compito

- Rendersi conto che Chiara ha due anni più di Anna (quindi ha 7 anni più di Michela) ed è la più vecchia, mentre Silvia è la più giovane in quanto ha 3 anni in meno di Michela.
- Ordinare le quattro sorelle per età, per esempio dalla più giovane alla più vecchia: Silvia – Michela – Anna – Chiara
- La ricerca può essere effettuata in modi diversi:
  - per tentativi non organizzati e aggiustamenti successivi;
  - per ipotesi e tentativi sistematici, anche eventualmente con l'ausilio di una tabella. Per esempio, Michela potrebbe avere 3 anni, Silvia potrebbe essere appena nata (0 anni), Anna avrebbe 8 anni e Chiara 10. Verificare che la somma sia 29. In questo caso, 0 + 3 + 8 + 10 = 21 anni. Aumentare di un anno l'età di Michela, individuare come si modificano le età delle sorelle e calcolare la somma: 1 + 4 + 9 + 11 = 25; procedere nella ricerca e trovare l'unica soluzione: 2 + 5 + 10 + 12 = 29;
  - a partire dalla somma 29, dividere per 4, attribuire a Michela 7 anni, verificare che non va bene e proseguire con opportuni aggiustamenti fino ad individuare la soluzione.
- Concludere in ogni caso che Michela ha oggi 5 anni.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (Michela oggi ha 5 anni) mostrando chiaramente come si è giunti alla soluzione (tabella, calcoli…)

3 Risposta corretta con descrizione poco chiara del procedimento seguito, ma con verifica della somma delle età delle quattro sorelle

2 Risposta corretta senza descrizione della procedura

oppure risposta errata, ma con procedimento corretto che tenga conto dei rapporti di età tra le sorelle, senza verifica della somma oppure con verifica errata

1 Individuazione dell'ordine per età delle quattro sorelle: Silvia – Michela – Anna – Chiara con errore nella determinazione delle età delle sorelle per non aver tenuto conto dei vincoli

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Rozzano

3. GITA SCOLASTICA (I) (Cat. 3, 4)

I bambini di una classe della scuola di Transalpinia faranno un'escursione nel parco e al ritorno si fermeranno a mangiare la pizza.

La pizzeria che li ospiterà ha tavoli da tre o da quattro posti.

I bambini dovranno occupare i tavoli senza lasciare posti vuoti.

Quanti tavoli da tre posti e quanti da quattro potrebbero occupare i 23 bambini della classe?

Scrivete tutte le possibilità e mostrate come avete fatto a trovarle.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Scomporre il numero 23 in addendi che siano solo 3 e 4.

Analisi del compito

- Comprendere che gli alunni devono occupare interamente tavoli da tre e da quattro posti.

Si può procedere in vari modi:

- Disegnare un certo numero di tavoli da tre e da quattro e provare a distribuire i 23 alunni senza lasciare posti vuoti.
- Effettuare delle addizioni con addendi tutti uguali a 3 e a 4, scoprendo che, per ottenere 23, ci possono essere al massimo cinque 3 oppure cinque 4, a seconda se si inizi a prendere in considerazione i tavoli da tre o da quattro: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 oppure 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3.
- Cominciare ad eliminare, se non lo si è fatto prima, uno o più addendi 3 (o 4) fino a concludere che non ci sono altre soluzioni.

Oppure

- Lavorare nel campo concettuale moltiplicativo (o misto): rendersi conto che i bambini non possono occupare solo tavoli da quattro. Al massimo ne possono occupare cinque e restano 3 bambini che andranno a riempire un tavolo da tre. Questa è una prima possibilità.
- Procedere quindi per tentativi ordinati: ad esempio ipotizzando 2 tavoli da tre e verificare che non è possibile completare con tavoli da quattro senza che rimangano posti vuoti ($23 – 2 \times 3 = 17$ e $17 = 4 \times 4$ resto 1) oppure 17 non è nella tabellina del 4. Proseguire aumentando via via il numero dei tavoli da 3 e trovare che c'è solo un'altra possibilità di rispettare le condizioni: 5 tavoli da tre e 2 tavoli da quattro ($23 – 5 \times 3 = 8$ e $8 \div 4 = 2$).
- Si può adottare il medesimo procedimento partendo con un solo tavolo da quattro.

Oppure

- Procedere per tentativi non ordinati e aggiustamenti successivi. In questo modo è probabile che non si trovino entrambe le soluzioni.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (trovate entrambe le possibilità: un tavolo da tre e 5 tavoli da quattro oppure 5 tavoli da tre e 2 tavoli da quattro) con descrizione chiara e completa della procedura (esempio: calcoli esplicitati, disegno)

3 Risposta corretta con descrizione della procedura poco chiara o incompleta
oppure risposta con una sola possibilità corretta e l'altra errata, ma procedimento corretto e ben descritto

2 Risposta corretta senza descrizione della procedura
oppure una sola possibilità corretta con procedimento corretto e ben descritto, senza altre possibilità errate

1 Una sola possibilità corretta senza descrizione della procedura
oppure inizio di ragionamento corretto (alcuni tentativi coerenti con calcoli o disegni senza giungere alle soluzioni)

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Belluno

4. I BRACCIALETTI DI LARA (Cat. 3, 4)

Lara ha un sacchetto con 100 perline gialle e uno con 100 perline rosse.

Prepara quattro braccialetti di perline colorate per le sue amiche.

Per ogni braccialetto infila una perlina rossa e due gialle e continua più volte a infilare perline allo stesso modo, poi termina con una perlina rossa.

Quando il braccialetto è completo, Lara conta le perline rosse che ha usato e vede che sono 12.

Dopo aver terminato i quattro braccialetti per le amiche vorrebbe prepararne uno per sé, uguale agli altri.

Basteranno le perline gialle che sono rimaste nel sacchetto?

Mostrate come avete trovato la risposta e scrivete il numero delle perline gialle che mancano o che restano.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare quanti elementi di un dato tipo compaiono in una sequenza di cui si conosce la regolarità di alternanza di due tipi di oggetti. Utilizzare questo numero per calcolare se 100 oggetti per ciascuno dei due tipi bastano a comporre cinque sequenze tutte uguali a quella data.

Analisi del compito

- Comprendere che è necessario appropriarsi della regola di costruzione di un braccialetto (RGGRGG ... R).
- Capire che è necessario contare solo le perline gialle usate per ciascun braccialetto.
- Disegnare la sequenza completa che compone un braccialetto, contare le perline gialle e moltiplicare questo numero per 4 o per 5.

Oppure

- Osservare che gli intervalli tra le 12 perline rosse sono 11 e che in ciascuno di questi ci sono 2 perline gialle. Concludere che in ogni braccialetto ci sono 22 (= 11 × 2) perline gialle.
- Procedere al calcolo delle perline gialle usate per i quattro braccialetti (22 × 4 = 88).
- Confrontare il risultato della precedente operazione con la quantità di perline a disposizione (100) e determinare quante perline sono rimaste (100 – 88 = 12).
- Procedere di nuovo ad un confronto, questa volta tra le perline rimaste (12) e quelle necessarie per un nuovo braccialetto (22) e rispondere che non sono sufficienti e ne mancano 10 (= 22 – 12).

Oppure

- Considerare che per cinque braccialetti occorrerebbero 110 (= 22 × 5) perline gialle e dedurre quindi che ne mancano 10 per l'ultimo braccialetto.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "No, mancano 10 perline gialle per il quinto braccialetto" o "No, restano solo 12 perline gialle dopo i quattro braccialetti" con procedimento chiaro (disegno o a parole) e completo di calcoli

3 Risposta corretta con procedimento parziale o poco chiaro (ad esempio non sono riportati alcuni calcoli o non è esplicitato il loro significato)

oppure risposta parziale (No) ma riportato il procedimento con il calcolo delle perline mancanti

2 Risposta corretta senza alcun procedimento o calcolo riportato

oppure risposta errata a causa di un errore di calcolo o di conteggio con procedimento corretto

1 Inizio di ricerca coerente (ad esempio, individuato il numero di perline gialle necessario per ciascun braccialetto)

oppure risposta parziale (No) senza procedura o calcoli

oppure risposta "No, mancano 20 perline" che considera 24 perline gialle per ogni braccialetto invece di 22

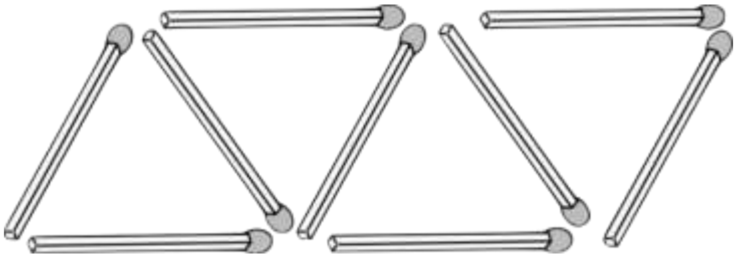
0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Siena

5. QUARANTA TRIANGOLI (Cat. 3, 4, 5)

Lea utilizza dei fiammiferi per realizzare una decorazione.



Comincia a formare un triangolo con tre fiammiferi (a sinistra nella figura), poi aggiunge altri fiammiferi per formare un secondo triangolo, poi con altri ancora ne forma un terzo e così via.

La figura mostra i nove fiammiferi che formano i primi quattro triangoli.

Quanti fiammiferi occorrono a Lea per formare 40 triangoli?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare il 41º (o il 40º) termine di una progressione aritmetica di ragione 2, il cui primo termine è uguale a 1 (o a 3) oppure calcolare il 10º termine di una progressione aritmetica di ragione 8, di primo termine 9.

Analisi del compito

- Comprendere (eventualmente proseguendo nella costruzione della figura) come è fatta la decorazione di triangoli (il primo triangolo si ottiene sistemando tre fiammiferi, mentre per ciascuno dei successivi ne servono solo due perché un lato è in comune con il triangolo che lo precede).
- Disegnare o realizzare concretamente l'intera decorazione e contare i lati dei triangoli.

Oppure (per via aritmetica), si può procedere in vari modi:

- osservare che, nella costruzione della decorazione, dopo il primo triangolo che ha 3 fiammiferi, si aggiungono 2 fiammiferi in più per ognuno dei triangoli successivi; costruire quindi la successione 3, 5, 7, ... per scoprire che il 40º termine è il numero 81. Oppure effettuare una addizione in cui il primo addendo è 3 e i successivi sono tutti uguali a 2: $3 + 2 + 2 + 2 + 2 + \ldots$ fino ad arrivare a 40 addendi in totale, con 39 addendi uguali a 2. Calcolare la somma (81) che rappresenta il numero di fiammiferi occorrenti per 40 triangoli.

Oppure

- Osservare che a partire dal primo fiammifero basta aggiungerne due per ottenere sia il primo triangolo che ciascuno dei triangoli successivi quindi $1 + 2 \times 40$ o considerare che ci sono 39 triangoli a parte il primo per un totale di $39 \times 2 + 3 = 81$ fiammiferi.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (81 fiammiferi) con descrizione chiara e completa della procedura seguita (disegno corretto della decorazione e conteggio dei fiammiferi, o ragionamento di tipo aritmetico e dettaglio dei calcoli)

3 Risposta corretta con descrizione parziale o poco chiara (disegno incompleto o non preciso o ragionamento non ben esplicitato)
oppure risposta errata a causa di un errore di calcolo o di conteggio con descrizione chiara e completa
oppure risposte 80 o 78 o 72 dovute all'errato conteggio del primo triangolo o alla dimenticanza dei primi quattro con descrizione chiara e completa

2 Risposta corretta senza alcuna descrizione
oppure risposta errata dovuta a un errore di calcolo con descrizione parziale o poco chiara
oppure risposte 80 o 78 o 72 dovute all'errato conteggio del primo triangolo o alla dimenticanza dei primi quattro con descrizione parziale o poco chiara

1 Inizio di ricerca coerente (disegno anche incompleto o qualche calcolo coerente o qualche descrizione di procedure corrette iniziate senza giungere ad un risultato)
oppure risposte 80 o 78 o 72 senza alcuna descrizione

0 Incomprensione del problema, per esempio risposta 120 (= 40×3) fiammiferi o risposta 90 (= 9×10)

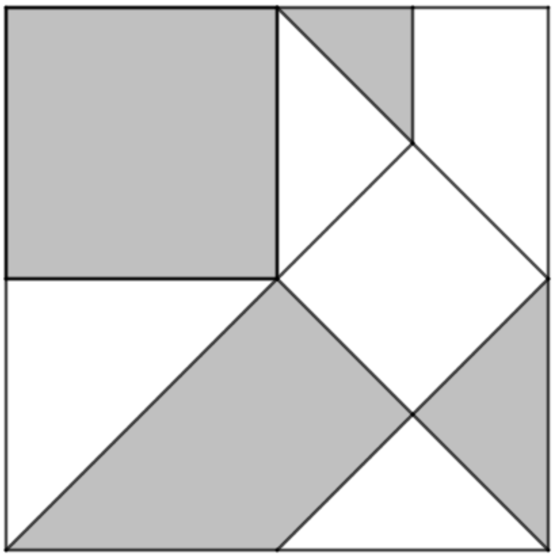
Livello: 3, 4, 5 **Origine:** Lyon

6. COLLAGE GEOMETRICO (Cat. 4, 5, 6)

Serafina ha realizzato su un cartoncino di forma quadrata il collage riprodotto qui sotto.

Ha ritagliato le figure da un foglio di colore bianco e da uno di colore grigio, poi le ha incollate con precisione sul cartoncino senza sovrapporle.

All'interno del collage ci sono nove figure: due quadrati, cinque triangoli (che sono dei mezzi-quadrati) e altre due figure.



Serafina ha utilizzato più carta bianca, più carta grigia, oppure la stessa quantità di carta bianca e grigia?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Confrontare le aree di due gruppi di figure di colori differenti disegnate all'interno di un quadrato. Il quadrato è suddiviso in due quadrati, cinque triangoli rettangoli isosceli e due trapezi rettangoli.

Analisi del compito

- Comprendere che il collage è un quadrato suddiviso in nove figure alcune bianche e altre grigie.
- Capire che è necessario confrontare l'area di tutte le figure bianche e quella di tutte le figure grigie.
- Procedere per ritaglio, spostamenti e/o sovrapposizioni, per esempio: ritagliare il triangolo piccolo e, per sovrapposizione, rendersi conto che entra 15 volte nella parte bianca e 17 nella parte grigia
- Scomporre il collage, per esempio tracciando altri segmenti o prolungando quelli esistenti o unendo punti evidenti della figura, in triangoli congruenti e contare i 15 triangoli bianchi e i 17 triangoli grigi (*vedi figura 1*).
- Concludere che Serafina ha utilizzato più carta grigia.

Oppure

- Suddividere il trapezio grande in due triangoli (uno grande e uno medio) e il triangolo bianco grande a sinistra in due triangoli che si possono scambiare con i triangoli grigi a destra (*vedi figura 2*).
- Rendersi conto che la metà sinistra del collage è grigia, la metà destra non è tutta bianca: compare un triangolino grigio in alto. Dedurre che le figure grigie occupano una superficie maggiore rispetto alle bianche.

Oppure

- Mettere in evidenza figure che consentono un confronto percettivo delle aree per esempio rilevare i quattro quadrati identici (*vedi figura 3*) in cui può essere suddiviso il collage e accorgersi che:
  - il quadrato in basso a sinistra è diviso in due triangoli identici, uno bianco e uno grigio;
  - il quadrato in basso a destra è diviso in quattro triangoli identici, due bianchi e due grigi;
  - restano da confrontare i due quadrati in alto uno dei quali è tutto grigio e l'altro è bianco, ma con un triangolo grigio;
  - dedurre quindi che è stata utilizzata una quantità maggiore di carta grigia.

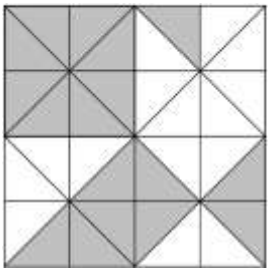


Figura 1

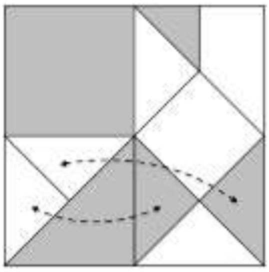


Figura 2

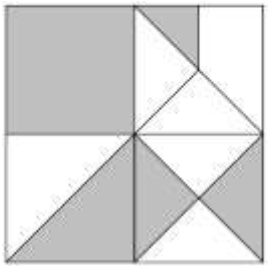


figura 3

Oppure

- Rendersi conto della relazione fra i triangoli e i quadrati (i triangoli sono dei mezzi-quadrati) e capire che sia le parti grigie sia quelle bianche possono essere pavimentate con un'unità di misura comune: i piccoli triangoli rettangoli isosceli (la misura dei lati perpendicolari corrisponde a ¼ di quella del lato del quadrato che rappresenta il collage). Ce ne sono due nei triangoli medi, tre nel trapezio piccolo, quattro nel triangolo grande e nel quadrato piccolo, otto nel quadrato medio ... fino al totale di 32.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Serafina ha utilizzato una maggiore quantità di carta grigia" o una formulazione equivalente con esplicitazione chiara del procedimento seguito (pavimentazione del quadro con il conteggio dei piccoli triangoli di ogni colore, oppure ritaglio che mostri il ricoprimento delle figure o che permetta un confronto percettivo delle aree, oppure spiegazione chiara, anche verbale, di come sono giunti alla risposta)

3 Risposta corretta con spiegazione incompleta (per esempio disegno con tratti mancanti o ritagli che non mostrano il perfetto ricoprimento delle figure o spiegazione confusa del confronto fra le aree delle parti del collage)
oppure confronto esatto delle aree con spiegazione chiara, ma risposta non esplicitata

2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione e traccia di lavoro o solo la dichiarazione di aver suddiviso il collage in triangoli o di aver proceduto per ritaglio e ricoprimento, ma senza alcun disegno o frase che dimostri la procedura adottata.

1 Inizio di ricerca corretta (per esempio inizio di suddivisione del quadrato grande in triangoli medi o confronto "due a due" delle aree di alcune figure)

0 Incomprensione del problema

Livello: 4, 5, 6

Origine: Gruppo Geometria Piana (GTGP)

7. GIOCHI CON LE CIFRE (Cat. 5, 6)

Audrey e Max si divertono a formare due numeri con le cifre 1, 2, 3, 4 e 5, utilizzando ciascuna di queste cifre una sola volta (per ogni coppia di numeri), poi li moltiplicano tra loro.

Max forma i numeri 123 e 45, poi calcola 123 × 45 = 5535.

Audrey forma i numeri 3241 e 5, poi calcola 3241 × 5 e trova un prodotto più grande di quello di Max.

Continuando il gioco con le stesse regole, qual è il risultato più grande che Max o Audrey potrebbero ottenere?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Formare due numeri naturali con le cifre 1, 2, 3, 4 e 5, usate una volta sola, in modo che il loro prodotto sia il più grande possibile.

Analisi del compito

- Comprendere i vincoli dell'enunciato: i due fattori devono avere solo le cifre date, senza alcuna ripetizione, dedurre che è possibile formare prodotti tra un numero di una cifra e uno di quattro cifre o prodotti tra un numero di due cifre e uno di tre cifre.
- Rendersi conto, per esempio a partire da qualche tentativo, che per cercare di massimizzare il prodotto è possibile giocare simultaneamente sulla grandezza dei due fattori rendendo ciascuno di essi il più grande possibile.
- Accorgersi che per ottenere questo risultato è necessario che uno dei due fattori inizi con 4 e l'altro con 5.
- Procedere con tentativi più o meno sistematici per testare i prodotti tra un numero di una cifra e uno di quattro cifre ordinando le cifre dei due fattori in ordine decrescente (4321 × 5 = 21 605 e 5321 × 4 = 21 284) e poi i prodotti tra un numero di due cifre e uno di tre cifre (421 × 53 = 22 313; 431 × 52 = 22 412; 432 × 51 = 22 032; 521 × 43 = 22 403; 531 × 42 = 22 302; 532 × 41 = 21 812), mantenere quindi il prodotto più grande (431 × 52 = 22 412).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (431 × 52 = 22 412) con spiegazioni chiare e complete che mostrano tutti i tentativi necessari

3 Risposta corretta con spiegazioni parziali che mostrano che è stata identificata la necessità di ordinare le cifre dei fattori in ordine decrescente e riportati solo alcuni tentativi
oppure risposta sbagliata per un errore di calcolo ma riportati tutti i tentativi necessari

2 Risposta corretta scrivendo solo "abbiamo fatto tanti calcoli" senza mostrarne alcuno e senza aggiungere altro
oppure risposta errata (521 × 43 = 22 403) accompagnata da tentativi non organizzati o incompleti

1 Inizio di ricerca coerente per esempio comprendendo che la prima cifra dei due fattori può essere un 4 o un 5

0 Incomprensione del problema

Livelli: 5, 6

Origine: Luxembourg

8. BIGLIE (Cat. 5, 6, 7)

Andrea e Luigi si divertono a giocare insieme con le biglie.

Oggi in tutto ne hanno 86 e Luigi ne ha 14 più di Andrea.

Dall'ultima volta che si erano incontrati per giocare, sono passate dodici settimane e, in ogni settimana trascorsa, Luigi ha comprato una nuova biglia mentre Andrea ne ha comprate due.

Quante biglie avevano rispettivamente Luigi e Andrea l'ultima volta che avevano giocato insieme?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare due numeri sapendo che incrementandone uno di 12 e l'altro di 24, si ottengono due numeri la cui somma è 86 e la differenza 14.

Analisi del compito

- Comprendere la situazione problematica ed il fattore temporale: oggi Luigi e Andrea hanno 86 biglie e Luigi ne ha 14 in più di Andrea ma questa differenza non è la stessa dell'ultima volta che si sono incontrati perché in 12 settimane i due amici hanno acquistato un numero diverso di biglie: Luigi ha comprato 12 biglie (una per ogni settimana) mentre Andrea 24 (2 per ogni settimana).
- Trovare il numero di biglie che ha oggi ognuno dei due amici, cioè cercare due numeri la cui somma sia 86 e la cui differenza sia 14. Si può procedere in vari modi:
  - per tentativi, ad esempio tenendo conto che Luigi deve avere più biglie di Andrea e perciò più di 43 (86 ÷ 2), attribuire a Luigi 44, 45, … biglie e trovare quelle di Andrea (42, 41, …), poi calcolare la differenza tra i due fino a quando risulta 14. Questo avviene quando si attribuiscono a Luigi 50 biglie perché in questo modo Andrea ne ha 36 (86 – 50) e la differenza è 14 (50 – 36);
  - per via aritmetica, aiutandosi eventualmente con una rappresentazione grafica, comprendere che togliendo o aggiungendo le 14 biglie in più dal totale (86 – 14 = 72) o (86 + 14 = 100) si trova rispettivamente il doppio delle biglie di Andrea o di Luigi e dividendo poi a metà il numero ottenuto, si trova il numero delle biglie di Andrea (72 ÷ 2 = 36), o di Luigi (100 ÷ 2 = 50);
  - comprendendo che se i due amici avessero lo stesso numero di biglie ognuno di essi ne avrebbe 43 (86 ÷ 2), ma essendo 14 la differenza tra il numero di biglie di uno e quelle dell'altro, a questa metà si deve aggiungere 7 per ottenere le biglie che ha ora Luigi (43 + 7 = 50) e togliere 7 per avere le biglie che ha ora Andrea (43 – 7 = 36).
- Trovare il numero delle biglie che avevano 12 settimane prima sottraendo dal numero di biglie che hanno ora quello delle biglie acquistate da ognuno dei due: Andrea 36 – 24 = 12 e Luigi 50 – 12 = 38

Oppure

- Capire che l'ultima volta che si erano incontrati avevano 36 (= 12 + 24) biglie in meno e quindi avevano 50 biglie (= 86 – 36) in totale.
- Dedurre che Andrea e Luigi avevano un numero diverso di biglie perché se avessero avuto 25 (= 50 ÷ 2) biglie ciascuno, dovrebbero avere oggi 25 + 12 = 37 Luigi e 25 + 24 = 49 Andrea, ma così la somma sarebbe ancora 86 mentre la differenza sarebbe 12 anziché 14.
- Procedere per tentativi organizzati cercando due numeri la cui somma sia 50 che soddisfino i dati del problema e scoprire che ciò avviene solo quando si attribuiscono 38 biglie a Luigi e 12 biglie ad Andrea perché 38 + 12 = 50 (le biglie di Luigi oggi), 12 + 24 = 36 (le biglie di Andrea oggi); 50 + 36 = 86 (le biglie di entrambi oggi) e 50 –36 = 14 (differenza tra le biglie di uno e dell'altro oggi). In tutti gli altri casi ciò non si verifica.

Oppure

- Dopo aver calcolato come sopra il numero delle biglie iniziali (50), rendersi conto che poiché alla fine Luigi ne ha 14 in più di Andrea, vuol dire che inizialmente Luigi ne aveva 26 in più di Andrea. Concludere allora che Andrea aveva 12 (= (50 – 26) ÷ 2) biglie e Luigi ne aveva 38 (= 12 + 26).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (Luigi 38, Andrea 12) con procedimento chiaro e completo (calcoli tutti evidenziati)

3 Risposta corretta con procedimento non chiaro o incompleto oppure con solo verifica

2 Risposta corretta senza spiegazioni
oppure risposta 24 e 26 perché si confonde Luigi con Andrea (50 – 2 × 12 = 26 e 36 – 12 = 24)
oppure risposta Luigi 50 e Andrea 36 perché dimenticato di togliere le biglie aggiunte nelle 12 settimane

1 Inizio di procedimento corretto (per esempio trovato il totale delle biglie che avevano inizialmente: 50)

0 Incomprensione del problema

Livello 5,6,7 Origine Siena

9. GITA SCOLASTICA (II) (Cat. 5, 6, 7)

La scuola di Transalpinia sta organizzando un viaggio di istruzione per due classi, la quinta A e la quinta B. In quinta A ci sono 6 maschi e 17 femmine, in quinta B ci sono 5 maschi e 21 femmine.

L'albergo dove pernotteranno ha camere da tre o quattro letti.

Maschi e femmine dormiranno in camere separate e, per ridurre al minimo le spese, nessuna delle camere occupate dovrà avere letti liberi.

Quante camere da tre letti e quante da quattro letti l'albergatore potrebbe riservare agli studenti?

Spiegate come avete trovato tutte le possibili soluzioni.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Scomporre i numeri 11 e 38 in addendi che siano solo 3 o 4.

Analisi del compito

- Comprendere che gli alunni hanno a disposizione solo camere a tre letti o camere a quattro letti che devono occupare senza lasciare posti liberi e che maschi e femmine hanno camere separate.
- Capire che, per determinare il numero di camere da prenotare, bisogna fare calcoli separati per i maschi e per le femmine.
- Supporre di incominciare a distribuire nelle camere i sei maschi della quinta A. Questi possono essere divisi in 4 + 2 o 3 + 3 (3 + 3 è da scartare perché lascia letti liberi nelle camere dei maschi della B divisibili in 3 + 2 o 4 + 1). Quindi, quattro maschi della quinta A occupano una camera, ai 2 che restano si aggiungono 2 dei cinque maschi della quinta B formando un altro gruppo di 4 più un gruppo da tre. Si osserva che, anche facendo altre scelte, l'unica soluzione per i maschi è 2 camere da quattro letti e 1 da tre.

  Facendo un ragionamento analogo per le 17 femmine della quinta A e le 21 della quinta B si possono ottenere queste possibilità: 2 camere da tre letti e 8 da quattro letti; 6 camere da tre letti e 5 da quattro letti; 10 camere da tre letti e 2 da quattro letti.

Oppure, considerando la totalità dei maschi (11) e delle femmine (38):

- Notare che entrambi i numeri non sono divisibili per 3 e neanche per 4, quindi non si possono dare né ai maschi né alle femmine solo camere da 3 o solo camere da 4.
- Per il numero delle camere dei maschi si osserva che 11 si può ottenere come somma di addendi 4 e 3 in un solo modo: $11 = 4 + 4 + 3$ oppure utilizzando una divisione per 4 si ottiene $11 = 4 \times 2 + 3$, dove il resto 3 corrisponde ai maschi che occuperanno una camera da tre; invece con una divisione per 3 si ottiene $11 = 3 \times 3 + 2$, dove il resto 2 non porta ad alcuna soluzione. Concludere quindi che per i maschi saranno riservate 2 camere da quattro e una da tre.
- Osservare che per le 38 femmine non è utile ricorrere alla divisione in quanto né quella per 3 ($38 = 12 \times 3 + 2$) né quella per 4 ($38 = 9 \times 4 + 2$) portano ad una soluzione. Procedere quindi in altro modo, per esempio, visto che non è possibile occupare 9 camere da quattro, provare con 8: $4 \times 8 = 32$, le femmine rimaste $38 - 32 = 6$ saranno sistemate in 2 camere da tre. Continuare così diminuendo di volta in volta una camera da quattro e trovare le altre possibilità. Concludere che alle femmine potranno essere riservate 8 camere da quattro e 2 camera da tre, oppure 5 camere da quattro e 6 da tre, oppure 2 camere da quattro e 10 da tre.

Oppure

- Comprendere che le camere da tre devono accogliere un numero di studenti multiplo di 3. Quindi individuati tutti i multipli di 3 scegliere quelli che sottratti da 11 e da 38 danno come avanzo un multiplo di quattro. Per 11 solo il 3 ($11 - 3 = 8$). Per 38 il 6 ($38 - 6 = 32$), il 18 ($38 - 18 = 20$) e il 30 ($38 - 30 = 8$).

  Analogo procedimento partendo dai multipli di 4.

Oppure

- Procedere con un elenco organizzato di sottrazioni per stabilire quante stanze da tre e quante stanze da quattro occorrono.
- Qualunque sia la scelta del procedimento, le tre soluzioni sono:
  - 3 camere da tre (una per i maschi e 2 per le femmine) e 10 da quattro (2 per i maschi e 8 per le femmine)
  - 7 camere da tre (una per i maschi e 6 per le femmine) e 7 da quattro (2 per i maschi e 5 per le femmine)
  - 11 camere da tre (una per i maschi e 10 per le femmine) e 4 da quattro (2 per i maschi e 2 per le femmine).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta “3 camere da tre e 10 da quattro, 7 camere da tre e 7 da quattro, 11 da tre e 4 da quattro” con spiegazione chiara e completa del procedimento

3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o incompleta del procedimento

oppure determinato il numero corretto delle camere dei maschi e le tre possibilità corrette per le camere delle femmine, ma dimenticata la somma, con spiegazione chiara e completa

2 Risposte corrette senza spiegazione

oppure trovata la soluzione per le camere dei maschi e 2 soluzioni per quelle delle femmine con procedimento corretto ben spiegato

1 Inizio di ragionamento corretto (esempio: trovate la soluzione per le camere dei maschi e/o trovata una sola soluzione per le femmine)

0 Incomprensione del problema (esempio: risposta 12 e 9 per le camere delle femmine, dovuta alla divisione di 38 per 3 e per 4)

Livello: 5, 6, 7

Origine: Belluno

10. DECORI NATALIZI (Cat. 5, 6, 7)

Un negozio di articoli natalizi fa un'offerta speciale: se si acquistano tre palle colorate e una stella dorata, si riceve in regalo una quarta palla.

Le palle colorate costano 0,60 euro ciascuna.

Lea deve decorare il suo albero di Natale. Acquista delle palle colorate e acquista anche delle stelle dorate in numero giusto per beneficiare dell'offerta del negozio.

Lea si accorge di avere speso la stessa somma sia per le palle colorate che per le stelle dorate. In tutto ha pagato 18 euro.

Quante palle colorate ha portato a casa Lea e qual è il prezzo di una stella dorata?

Spiegate come avete trovato la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare un numero di oggetti e il costo di altri oggetti, quando si conoscono le relazioni che li legano.

Analisi del compito

- Comprendere che, grazie alla promozione, Lea riceve un certo numero di palle gratuitamente (un terzo di quelle acquistate)
- Comprendere che la spesa di 18 euro è divisa esattamente a metà (9 euro per le palle e 9 euro per le stelle).
- Comprendere che, per beneficiare dell'offerta, Lea ha acquistato le palle a gruppi di tre al prezzo di 1,80 (= 0,60 × 3) euro ciascuno.
- Dedurre che Lea ha acquistato 5 (= 9 ÷ 1,80) confezioni di 3 palle e, di conseguenza, 5 stelle dorate.
- Comprendere che Lea ha acquistato 15 palle (5 × 3) e ne ha ricevute 5 gratuitamente, quindi ha portato a casa 20 palle.
- Calcolare il prezzo di una stella: 9 ÷ 5 = 1,80 euro.

Oppure

- Sapendo che Lea ha beneficiato dell'offerta, comprendere che in questo caso quattro palle vengono vendute al prezzo di tre, perciò per 1,80 euro si hanno quattro palle, 9 ÷ 1,80 = 5. Lea ha quindi portato a casa 5 confezioni da quattro palle e, quindi, 5 stelle dorate. Lea ha dunque 20 palle colorate e 5 stelle dorate al prezzo di 1,80 (= 9 ÷ 5) euro l'una.

Oppure

- Comprendere che Lea ha acquistato tante stelle dorate quanti sono i gruppi di tre palle colorate.
- Osservare che ha speso tanto per le palle quanto per le stelle, dedurne che una stella ha lo stesso prezzo di tre palle, cioè 1,80 euro.
- Dedurre che Lea ha acquistato 5 (= 9 ÷ 1,80) stelle.
- Osservare quindi che ha acquistato anche cinque gruppi di tre palle, ossia 15 palle e, ricevendone 5 in regalo, ne ha portate a casa 20.

Oppure

- Comprendere che Lea ha speso per le palle 9 euro e che quindi ne ha comprate 15 (= 9 ÷ 0,60), cioè 5 gruppi di 3 palle. Ella ha quindi acquistato 5 stelle dal momento che ha 5 gruppi di palle.
- Dedurre che il prezzo di una stella è di 1,80 euro (= 9 ÷ 5). Visto che Lea ha acquistato 5 confezioni di 3 palle e 5 stelle, il negozio le regala 5 palle. Al termine dell'acquisto Lea porta a casa 20 palle.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (20 palle; 1,80 euro per ogni stella) con spiegazione chiara e completa

3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o incompleta

2 Risposta parziale corretta: (20 palle) senza spiegazione che presuppone il calcolo fatto a parte senza riportarlo sul foglio risposta
oppure trovato il numero di palle pagate (15) e il numero di stelle (5) acquistate
oppure il numero di stelle acquistate (5) e il prezzo di una stella (1,80) senza spiegazione
oppure risposta errata con procedimento corretto e ben dettagliato ma con un errore di calcolo

1 Inizio di ricerca corretto con solo il numero di palle pagate (15)

0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7

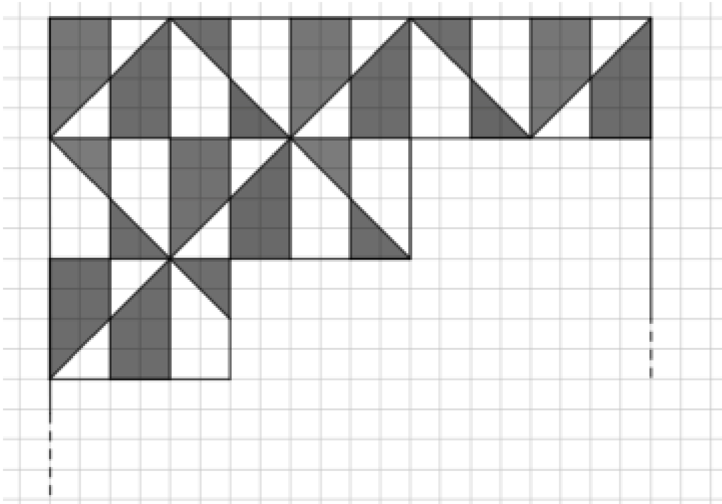
Origine: Puglia

11. IL DISEGNO DI PIETRO (I) (Cat. 5, 6, 7)

Pietro ha disegnato un grande quadrato su un foglio quadrettato.

Inizia a suddividerlo con linee–che seguono la quadrettatura o che tagliano in diagonale i quadretti. Colora di grigio alcune parti in modo da creare un bel disegno in bianco e grigio.

In figura potete vedere l'inizio del suo lavoro con la parte superiore del quadrato già completamente disegnata e colorata.



Pietro continua il disegno allo stesso modo fino a riempire tutto il quadrato.

A lavoro terminato la parte grigia e la parte bianca non hanno la stessa area.

Qual è la differenza tra le aree della parte grigia e della parte bianca?

Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

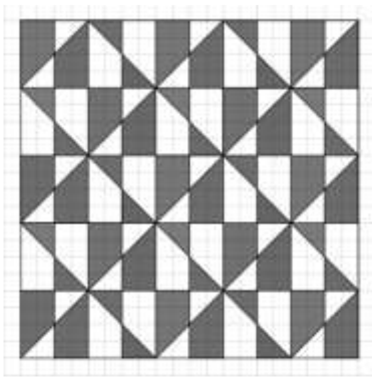
ANALISI A PRIORI

Compito matematico

A partire da un disegno, completare una pavimentazione composta di figure bianche e grigie in un quadrato di 20 × 20 quadretti. Confrontare le aree delle zone bianche e grigie della pavimentazione completa e determinare la differenza tra esse.

Analisi del compito

- Osservare la figura e il testo, dedurre che si tratta di una griglia 20 × 20 quadrettata.
- Osservare, ad esempio, che il motivo geometrico si ripete in moduli di 4 × 4 quadretti e che in due moduli adiacenti i colori degli stessi poligoni sono invertiti.



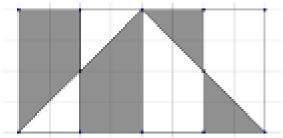
- Capire che per risolvere il problema è possibile contare il numero totale di poligoni di ciascun tipo e calcolare la misura dell'area complessiva per ciascuna delle due zone di colore diverso, scegliendo un'unità di misura opportuna.
- Osservando il frammento della pavimentazione ed eventualmente completandolo, capire che:
  - il disegno è formato da bande (di 4 quadretti di larghezza) in cui si alternano due trapezi grigi, due triangoli bianchi, due trapezi bianchi e due triangoli grigi;
  - le bande sono cinque sia in orizzontale che in verticale e si può lavorare in modo indifferente "orizzontalmente" o "verticalmente";
  - nelle linee dispari i trapezi grigi sono sei e quelli bianchi sono quattro, viceversa nelle linee pari;

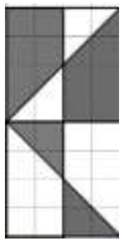
  - nelle linee dispari i triangoli grigi sono quattro e quelli bianchi sono sei, viceversa in quelle delle linee pari.
  - In tutto ci sono 26 trapezi grigi e 24 trapezi bianchi, 24 triangoli grigi e 26 triangoli bianchi
- Utilizzando l'area di un quadretto come unità di misura, la zona grigia misura 26 × 6 + 24 × 2 = 204 unità e la zona bianca 24 × 6 + 26 × 2 = 196 unità. La differenza fra le aree delle parti grigie e quelle delle parti bianche è quindi 204 − 196 = 8 unità)

Oppure

Procedere ricercando delle sotto-figure per le quali le aree grigie e bianche siano uguali.

- Per esempio le coppie di motivi adiacenti come si vedono di seguito: sono costituiti da 2 trapezi grigi e due trapezi bianchi uguali tra loro, da due triangoli bianchi e due triangoli grigi uguali tra loro: dunque la superficie bianca ha la stessa area di quella grigia.
- Per calcolare la differenza tra bianco e grigio, si possono dunque eliminare le coppie di motivi adiacenti, 12 in tutto.





- Resta un solo motivo con due trapezi grigi e due triangoli bianchi.
- Su questo motivo si vede che la superficie bianca è la stessa di un quadrato 2 × 2. La differenza tra le superfici bianca e grigia è quindi quella di un rettangolo 2 × 4.
- Si può calcolare: prendendo come unità l'area di un quadretto della quadrettatura, l'area grigia dei due trapezi misura 6 × 2 = 12 unità e l'area bianca dei due triangoli misura 2 × 2 = 4 unità. La differenza delle aree grigie e bianche misura quindi 12 – 4 = 8 unità.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (Area grigia − area bianca = 8 quadretti unitari oppure altri numeri trovati utilizzando altre unità di misura, calcolati correttamente), con descrizione chiara e completa del procedimento seguito e dei calcoli effettuati

3 Risposta corretta con spiegazione incompleta o poco chiara (ad esempio sono presenti i calcoli, ma non è descritto chiaramente come si è effettuato il conteggio)
oppure effettuato correttamente il calcolo delle due aree e ben spiegato ma manca quello della differenza

2 Risposta errata per conteggio o calcolo errato ma ragionamento corretto ed esplicitato
oppure risposta corretta senza alcuna spiegazione

1 Inizio di ragionamento o di conteggio corretto (ad esempio individuazione del numero dei trapezi e dei triangoli)

0 Incomprensione del problema (ad esempio, per ogni colore, sommato il numero dei trapezi con il numero dei triangoli)

Livello: 5, 6, 7

Origine: Parma + Milano (rivisitazione del problema *Il tavolino del nonno*)

12. SUL PIANETA ALFA (Cat. 6, 7, 8)

Il capitano Zûc è appena atterrato con la sua navicella spaziale sul pianeta Alfa che è abitato da tre extraterrestri, uno vestito di blu, uno di rosso e uno di giallo.

Il capitano sa che i tre extraterrestri si chiamano *Alc, Blanc, Clap e* che solo uno dice sempre la verità e gli altri due mentono sempre.

Chiede a ciascuno di loro: «Come ti chiami?».

L'extraterrestre vestito di blu risponde: «Io mi chiamo *Clap*». Poi aggiunge: «Il mio amico vestito di giallo non si chiama *Alc*».

L'extraterrestre vestito di rosso risponde: «Il mio amico vestito di blu non si chiama *Alc*».

L'extraterrestre vestito di giallo risponde: «Io mi chiamo *Blanc*». Poi conclude: «Il mio amico vestito di rosso non si chiama *Clap*».

Abbinate ogni extraterrestre al nome corretto e spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Associare a tre personaggi i loro nomi a partire da alcune loro affermazioni sapendo che uno solo dice la verità mentre gli altri due mentono.

Analisi del compito

- Appropriarsi della situazione: ci sono tre extraterrestri che hanno vestiti di tre colori diversi (blu, rosso e giallo), due mentono sempre e uno dice sempre la verità.
- Capire che i nomi degli extraterrestri sono Alc, Blanc e Clap, ma che non si sa a chi corrispondano.
- Analizzare le frasi dei tre extraterrestri per capire chi dice la verità e chi mente: supporre che uno di essi dica la verità e, confrontando le sue affermazioni con quelle degli altri due, riscontrare che non ci siano contraddizioni, dedurre quali siano i mentitori e assegnare il nome a ciascun personaggio.

  Per esempio supporre che ET blu dica la verità, allora le frasi dell'ET blu (*Io mi chiamo Clap; giallo non si chiama Alc*) sono entrambe vere
  - si avrà che blu = Clap, giallo ≠ Alc
  - la frase dell'ET rosso *(blu non si chiama Alc)*, è allora vera a sua volta, ma questo non può essere perché uno solo dice il vero.

  Considerare come vera la frase dell'ET Rosso (*Blu non si chiama Alc*)
  - si avrà che blu ≠ Alc e quindi può essere blu = Blanc oppure blu = Clap;
  - le frasi dell'ET Blu (*Io mi chiamo Clap; Giallo non si chiama Alc*) devono essere entrambe false e perciò blu ≠ Clap e giallo = Alc;
  - le frasi dell'ET giallo *(Io mi chiamo Blanc; Rosso non si chiama Clap)* devono essere entrambe false e perciò giallo ≠ Blanc e rosso = Clap;
  - dedurre che, se giallo = Alc e rosso = Clap, allora blu = Blanc: gli abbinamenti rispettano sia la frase dell'ET rosso che è vera, sia le altre due frasi che sono false.

  Se invece si considerano vere le frasi dell'ET giallo (*Io mi chiamo Blanc; Rosso non si chiama Clap*).
  - si avrà che giallo = Blanc e rosso ≠ Clap, allora, visto che giallo è definito, blu = Clap che renderebbe vere sia le frasi dell'ET blu sia quelle dell'ET rosso.
  - dedurre che l'ET giallo non può essere quello che dice la verità e quindi è uno dei due che mente.
  - Assegnare ai tre extraterrestri il nome corretto: **ET blu = Blanc, ET rosso = Clap, ET giallo = Alc**.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (blu = Blanc, rosso = Clap, giallo = Alc) con una descrizione del procedimento che mostri tutti i passaggi che hanno permesso di arrivare all'abbinamento (ipotesi di partenza, deduzioni, verifiche).

3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o con solo verifica

2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione

1 Inizio di ragionamento corretto che non porta alla conclusione

0 Incomprensione del problema oppure risposta "I tre extraterrestri si chiamano Clap, Alc e Blanc" (o espressioni equivalenti)

Livello: 6, 7, 8 Origine Udine

13. RACCOLTA DI FRUTTI DI BOSCO (Cat. 7, 8)

I bambini di Transalpinia hanno organizzato una raccolta di frutti di bosco e si sono divisi in quattro gruppi: i raccoglitori di mirtilli, quelli di more, quelli di fragole e quelli di lamponi. La situazione dei gruppi è questa:

- i raccoglitori di more sono la metà dei raccoglitori di mirtilli;
- i raccoglitori di fragole sono 6 in più dei raccoglitori di mirtilli;
- i raccoglitori di lamponi sono 11;
- i raccoglitori di frutti viola (mirtilli e more) sono 8 in meno dei raccoglitori di frutti rossi (fragole e lamponi).

Quanti bambini partecipano alla raccolta dei frutti di bosco?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare un numero naturale che sia la somma di altri quattro numeri a, b, c, d tali che: $a = b/2$, $c = b + 6$, $a + b = c + d – 8$, $d = 11$

Analisi del compito

- Comprendere dalla lettura del testo che è noto il numero dei raccoglitori di lamponi, mentre per i raccoglitori di more e per quelli di fragole si conoscono solo le relazioni tra i loro rispettivi numeri e il numero dei raccoglitori di mirtilli: nel primo caso “la metà”, nel secondo caso “6 in più”.
- Comprendere che la quarta condizione stabilisce una relazione tra il numero dei raccoglitori di frutti viola e il numero dei raccoglitori di frutti rossi, che può anche essere espressa in forma di uguaglianza (per esempio, il numero totale dei raccoglitori di frutti viola aumentato di 8 è uguale al numero totale dei raccoglitori di frutti rossi, oppure la differenza tra il numero totale dei raccoglitori di frutti rossi e quello dei raccoglitori di frutti viola è 8, …).
- Rendersi conto che occorre trovare il numero dei raccoglitori di mirtilli e che tale numero è il doppio di quello dei raccoglitori di more.
- Procedere per tentativi organizzati, con l’aiuto eventualmente di uno schema o di una tabella, ipotizzando un certo numero (pari) di raccoglitori di mirtilli. Provare ad esempio con 10, aumentarlo della sua metà e aggiungere 8: si ottiene 23. Poiché $23 \neq (10 + 6) +11 = 27$, il numero 10 non va bene. Continuare con altri numeri (pari), fino a trovare che con 18 la relazione di uguaglianza è verificata: $(18 + 9) + 8 = (18 + 6) + 11 = 35$ (procedendo in modo sistematico si potrebbe osservare che, passando da un numero (pari) al suo successivo, la prima uguaglianza aumenta di 3, mentre la seconda aumenta di 2, quindi la differenza diminuisce ogni volta di 1).
- Ricavare che, essendo 18 il numero dei raccoglitori di mirtilli, i raccoglitori di more sono 9 e quelli di fragole sono 24 e che quindi il numero totale dei raccoglitori di frutti di bosco è 62 (= 18 + 9 + 11 + 24).
- La procedura per tentativi può essere effettuata anche ipotizzando il numero dei raccoglitori di more.

Oppure

Procedere come sopra con tentativi non organizzati.

Oppure (procedura di tipo algebrico, anche non formalizzata)

- Comprendere, aiutandosi eventualmente con uno schema o un disegno, che una volta e mezzo il numero di raccoglitori di mirtilli aumentato di 8 è uguale al numero dei raccoglitori di mirtilli aumentato di 17 (= 6 + 11) e dedurre quindi che la metà del numero dei raccoglitori di mirtilli è 9 (=17 – 8), di conseguenza il numero di raccoglitori di mirtilli è 18. Concludere che il numero totale dei raccoglitori è 62.

Oppure

- Utilizzando uguaglianze di questo tipo: Mo = 1/2 Mi; Fr = Mi + 6; La = 11; Mi + Mo = (Fr + La) – 8 da cui 3Mo = (2Mo + 6) + 3 quindi Mo = 9 o (aiutandosi eventualmente con una rappresentazione grafica) scrivere Mi + Mo + 8 = Mi + 6 + 11 e dedurre (facendo considerazioni di bilanciamento) che Mo + 8 = 17 da cui Mo = 9, e trovare quindi M = 18 e il numero totale (18 + 9 + 11 + 24).

Oppure

- Assegnare, nell’uguaglianza, il valore x al numero di raccoglitori di more (o scrivere con le lettere come nella procedura precedente), in modo da evitare frazioni di x: Mo = x; Mi = $2x$; Fr = $2x + 6$; La 11. Si ottiene $x + 2x = 2x + 6 + 11 − 8$, e quindi $x + 2x = 2x + 9$, da cui $x = 9$; a partire da questo valore di x utilizzando le relazioni precedenti, si ritrovano gli altri valori per dedurre il numero totale dei raccoglitori: 9 + 18 + 24 + 1 = 62.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (62 bambini) con descrizione chiara e completa del procedimento (risoluzione per tentativi esplicitati con presenza dei calcoli o procedura di tipo algebrico)

3 Risposta corretta con descrizione poco chiara o incompleta (per esempio tentativi non ben esplicitati)
oppure procedura corretta e ben spiegata, ma senza calcolare il numero totale dei bambini

2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione o con solo la verifica
oppure risposta errata a causa di un errore di calcolo con descrizione chiara e completa

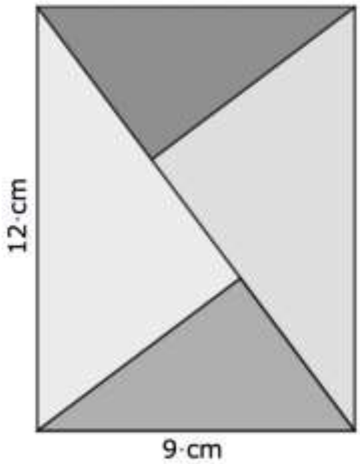
1 Inizio di ragionamento corretto (che mostri l'appropriazione del problema)

0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8

Origine: Siena

14. UN PUZZLE (I) (Cat. 7, 8)



Un negozio di giocattoli propone questo puzzle formato da quattro triangoli rettangoli ritagliati da un rettangolo di legno di 12 cm per 9 cm.

Il gioco consiste nell'usare questi quattro pezzi per formare altre configurazioni, spostandoli e ruotandoli.

Per esempio, si può formare un nuovo rettangolo, differente da questo.

Su un foglio di carta, disegnate questo nuovo rettangolo con le sue dimensioni effettive e determinate il valore esatto del suo perimetro.

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

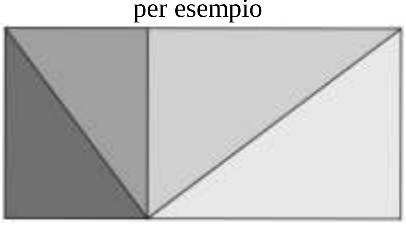
Compito matematico

Dato un rettangolo di cui sono note le dimensioni, diviso in quattro triangoli rettangoli simili e congruenti due a due, disegnare un altro rettangolo con dimensioni diverse da quello dato, ma formato dagli stessi quattro triangoli e determinare il valore del suo perimetro.

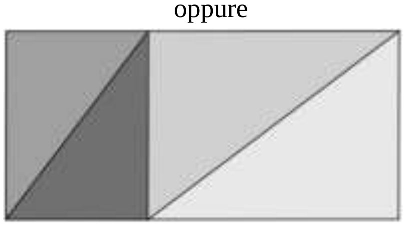
Analisi del compito

- Osservare che il rettangolo è diviso dalla sua diagonale in due triangoli rettangoli congruenti, questi sono a loro volta divisi dall'altezza relativa all'ipotenusa in due triangoli rettangoli formando così due coppie di triangoli rettangoli congruenti.
- Spostando o ruotando i triangoli del puzzle, formare un nuovo rettangolo:

per esempio



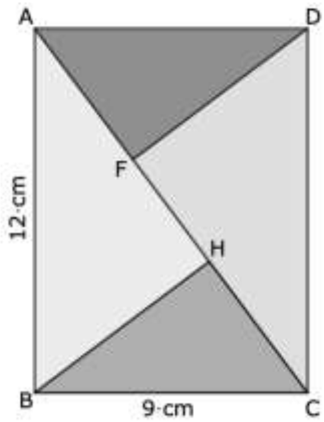
oppure



oppure altri ottenuti per simmetria assiale rispetto ai lati di questo rettangolo

- Per trovare il suo perimetro, ci sono due strategie molto diverse: attraverso misure approssimative su un disegno preciso o calcoli esatti effettuati applicando proprietà geometriche.
  - Osservare che la lunghezza del nuovo rettangolo è uguale a quella della diagonale del rettangolo dato e che la sua larghezza è uguale alla lunghezza comune dei lati dei triangoli piccoli.

    Con un disegno: riprodurre precisamente su un foglio di carta il disegno del puzzle dato con l'aiuto di un doppio decimetro e di una squadra e misurare le lunghezze dei lati degli angoli retti dei triangoli rettangoli.
  - Trovare al meglio 5,4 cm e 7,2 cm per il piccolo e 7,2 cm e 9,6 cm per il grande.
  - Dedurne il perimetro di questo nuovo rettangolo: $2 \times (7{,}2 + 15) = 44{,}4$ cm
  - Osservare che i due rettangoli pur avendo la stessa area hanno perimetri differenti (42 cm e 44,4 cm).



- Oppure con un calcolo: comprendere che occorre conoscere le lunghezze dei cateti dei triangoli rettangoli.
  - Osservare che la diagonale (AC) divide il triangolo in due triangoli rettangoli uguali e che le altezze (DF) e (BH) formano quattro triangoli rettangoli, uguali a due a due.
  - Comprendere che occorre prima calcolare la lunghezza AC della diagonale.
  - Utilizzare il Teorema di Pitagora: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$. Da cui AC = 15 cm.
  - Per trovare la lunghezza DF, si può osservare che il rettangolo ABCD ha area doppia di quella del triangolo ADC e calcolarla in due modi differenti: è la metà di quella del rettangolo ABCD, è anche il prodotto della sua base AC per la sua altezza DF.
  - Così, $2 \times \text{Area (ADC)} = AD \times DC = AC \times DF$.
  - Dedurne questa proprietà notevole dell'altezza tracciata dall'angolo retto in un triangolo rettangolo: la sua lunghezza è uguale al prodotto delle lunghezze dei lati dell'angolo retto diviso per quella dell'ipotenusa: $DF = (AD \times DC) / AC$.

Calcolare la lunghezza DF: DF = (12 × 9) / 15 = 7,2 cm.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (44,4 cm) con spiegazioni chiare: un disegno preciso o utilizzazione del Teorema di Pitagora per AC e calcolo dell'area di ADC per trovare l'altezza DF

3 Risposta approssimata (tra 44 cm e 45 cm) con misure su un disegno preciso

oppure trovata la risposta corretta con spiegazioni poco chiare

2 Un disegno preciso del nuovo rettangolo e misura della lunghezza della diagonale AC = 15 cm

oppure un disegno poco preciso ma con calcolo della lunghezza della diagonale con il teorema di Pitagora

1 Disegno poco preciso del nuovo rettangolo (senza calcolo del perimetro né della diagonale)

0 Incomprensione del problema, oppure risposta 42 cm

Livello: 7, 8

Origine: Milano + Franche-Comté

15. SCAMBI DI BIGLIE (Cat. 8, 9, 10)

Manuel arriva a scuola con 76 biglie piccole.

Ne scambia il più possibile con delle biglie medie. Per ciascuna biglia media, deve dare in cambio sempre lo stesso numero di biglie piccole.

In seguito scambia il maggior numero possibile delle biglie medie che ha ottenuto con delle biglie grandi. Per ciascuna biglia grande, deve dare in cambio sempre lo stesso numero di biglie medie.

Alla fine degli scambi, Manuel ha tre biglie grandi, quattro biglie medie e una biglia piccola.

Trovate quante biglie piccole ha dato Manuel in cambio di una biglia media e quante biglie medie ha dato in cambio di una biglia grande.

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Ripartire 76 oggetti in «raggruppamenti equivalenti» poi in «raggruppamenti di raggruppamenti equivalenti» per arrivare ad ottenere un oggetto isolato, 4 raggruppamenti e 3 raggruppamenti di raggruppamenti.

Analisi del compito

- Comprendere che ci sono due scambi successivi, che, ad ogni livello di scambio, lo stesso numero di biglie piccole (o di biglie medie) viene dato in cambio di una biglia media (o di una biglia grande) e che ad ogni livello si scambia il maggior numero possibile di oggetti.
- Dedurre che, poiché alla fine resta una biglia piccola, saranno scambiate 75 biglie piccole per 3 biglie grandi e 4 biglie medie.
- Procedere per tentativi organizzati come, ad esempio, nella tabella seguente che riporta tutti i casi possibili corrispondenti a 3 biglie grandi + 4 biglie medie = 75

n. biglie piccole per una biglia media	n. biglie piccole per 4 biglie medie	n. biglie piccole restanti per 3 biglie grandi	n. biglie piccole per una biglia grande	n. biglie medie per una biglia grande
2	8	67	67 non divisibile per 3	nessuna
3	12	63	63/3 = 21	21/3=7
4	16	59	59 non divisibile per 3	nessuna
5	20	55	55 non divisibile per 3	nessuna
6	24	51	51/3 = 17	17/6 nessuna
7	28	47	47 non divisibile per 3	nessuna
8	32	43	43 non divisibile per 3	Nessuna
9	36	39	39/3 = 13	13/9 nessuna
10	40	35	35 non divisibile per 3	nessuna
11	44	31	31 non divisibile per 3	nessuna
12	48	27	27/3 = 9	nessuna perché ne occorrono 12 per una biglia media

Oppure

- Procedere per deduzioni, per esempio
  - considerare che 75 può essere scomposto in 3 × 25 e 5 × 15; dedurne che gli scambi possibili sono:
    3 biglie piccole per una media: risultato 25 medie (possibilità 1)
    25 biglie piccole per una media: risultato 3 medie (incompatibile con il numero finale di medie)
    5 biglie piccole per una media: risultato 15 medie (possibilità 2)
    15 biglie piccole per una media: risultato 5 medie (possibilità 3)
- Riprendere lo stesso ragionamento per lo scambio delle biglie medie con quelle grandi, scomponendo i numeri 25, 15, 5 diminuiti di 4 in prodotti di due fattori:
  - possibilità (1): 25 – 4 = 21. Dato che 21 ÷ 3 = 7, la soluzione «7 biglie medie in cambio di una grande» è possibile e dà come risultato esattamente 3 biglie grandi;
  - possibilità (2): 15 – 4 = 11. Dato che 11 non è divisibile per 3, questa possibilità è da eliminare;

- possibilità (3): 5 – 4 = 1. Dato che 1 non è divisibile per 3, questa possibilità è da eliminare.

Oppure

- osservare che una biglia grande deve valere più di 4 biglie medie dal momento che sono stati fatti tutti gli scambi possibili. Procedere per tentativi a partire da 5 medie per una grande, si avrebbe allora che 75 biglie piccole corrispondono a 19 biglie medie e questo non è possibile perché 75 non è multiplo di 19. Analogamente verificare che non è possibile 6 medie per una grande mentre va bene 7 medie per una grande. Poiché 75 piccole equivalgono a 25 (= 21 + 4) medie, dedurre che una media equivale a 3 piccole. Accorgersi che con valori superiori a 7 medie per una grande non si possono avere soluzioni.
- Procedura mista: per deduzione, poi per tentativi.

Oppure per via algebrica

- indicato con p ($p > 1$) il numero delle biglie piccole per ottenere una biglia media e con m ($m > 4$) il numero delle biglie medie per ottenere una grande, dedurre che per ottenere una biglia grande occorrono mp biglie piccole e quindi che $3mp + 4m = 75$. Trovare la soluzione per tentativi su p e ricavare di conseguenza m o viceversa per tentativi su m e ricavare p.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta «3 biglie piccole in cambio di una media» e «7 biglie medie in cambio di una grande» con spiegazioni chiare e complete

3 Risposta corretta con spiegazioni parziali o poco chiare (per esempio tentativi non organizzati o non esaustivi)
oppure risposta errata dovuta ad un errore di calcolo, con spiegazioni chiare e complete

2 Risposta corretta senza spiegazione, ma con solo verifica
oppure risposta compatibile con l'enunciato per lo scambio biglie piccole-biglie medie «3 biglie piccole in cambio di una media» oppure «5 biglie piccole in cambio di una media» oppure «15 biglie piccole in cambio di una media» con spiegazioni complete o parziali.

1 Inizio di ricerca corretto, per esempio tentativi di abbinamenti per gli scambi, oppure deduzione del fatto che 75 biglie piccole sono state scambiate con 4 biglie medie e 3 grandi
oppure risposta corretta senza alcuna spiegazione né verifica

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Bourg-en-Bresse

16. FIGURINE DA REGALARE (Cat. 8, 9, 10)

Antonio ha deciso di regalare i suoi doppioni di figurine agli amici.

Inizialmente Antonio pensa di regalarne 5 a ciascuno, ma il numero di figurine a disposizione non è sufficiente perché ne mancano 4.

Così decide che può tenerne per sé 8 e le altre distribuirle in parti uguali ai suoi amici.

Quale può essere il numero di doppioni di figurine che ha Antonio?

Indicate tutte le soluzioni e spiegate come le avete trovate.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare due numeri naturali tali che il primo, se aumentato di 4, sia 5 volte il secondo, e se diminuito di 8 sia multiplo del secondo.

Analisi del compito

- Capire che nel problema ci sono due incognite da gestire: numero di figurine e numero di amici di Antonio.
- Capire inoltre che queste due incognite sono correlate fra loro: il numero di figurine differisce di 4 da un multiplo di 5 (ovvero supera di 1 un multiplo di 5) e che se si sottrae 8 al numero di figurine si ottiene un multiplo del numero degli amici di Antonio.
- Dedurre, dal fatto che mancano 4 figurine per poterne dare 5 a ciascun amico, che ognuno di loro ne avrà un numero n minore di 5.
- Constatare che 11è il primo numero di figurine superiore a 8 che, aumentato di 4, dà un multiplo di 5. Fare delle prove con gli interi successivi che hanno questa stessa proprietà e determinare i valori possibili per il numero a degli amici. Per questo si può fare una tabella come la seguente:

figurine f	$f + 4$	$5 \times a$	a	$f - 8$	$n \times a$	n
11	15	5× 3	3	3	1× 3	1
16	20	5× 4	4	8	2× 4	2
21	25	5× 5	5	13	no	
26	30	5× 6	6	18	3× 6	3
31	35	5× 7	7	23	no	
36	40	5× 8	8	28	no	
41	45	5× 9	9	33	no	
46	50	5× 10	10	38	no	
51	55	5× 11	11	43	no	
56	60	5× 12	12	48	4× 12	4

- Comprendere che se il numero di amici continuasse ad aumentare, il numero delle figurine da distribuire a ciascuno aumenterebbe ugualmente, ma non deve superare 4 per persona. Conseguentemente le possibilità, per il numero di doppioni di Antonio sono; 11, 16, 26, 56.

Oppure (strategia esperta)

- Siano a il numero di amici di Antonio e f il numero di figurine da dare a ciascuno, si ottiene l'equazione $5a - 4 = f = n\,a + 8$, guardando al fatto che n può essere uguale a 1, 2, 3 o 4, trovare le 4 soluzioni.
- Il numero di figurine da distribuire è di 11 se gli amici sono 3 ($n = 1$), 16 si gli amici sono 4 ($n = 2$), 26 se gli amici sono 6 ($n = 3$), 56 se gli amici sono 12 ($n = 4$).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (11, 16, 26 o 56 doppioni), con procedura chiara e ben spiegata

3 Risposta corretta con spiegazioni parziali o poco chiare (ad esempio sono riportati i calcoli ma senza specificare cosa è stato trovato di volta in volta)
oppure trovate due o tre soluzioni, con spiegazioni chiare

2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure 2 o 3 soluzioni con spiegazioni poco chiare
oppure trovata una sola soluzione con spiegazione chiara e completa

1 Inizio di ricerca coerente (ad esempio qualche tentativo non completato)
oppure trovata una sola soluzione senza spiegazione

0 Incomprensione del problema

Livello: 8,9,10

Origine: Siena

17. VINCERE CON UN DADO (Cat. 8, 9, 10)

In uno stand del Luna Park, pagando un euro, si può fare una partita a dadi e si può scegliere di giocare secondo una delle due regole seguenti:

1ª regola del gioco:

«Il giocatore lancia un dado due volte di seguito, se la somma dei numeri ottenuti è maggiore o uguale a 9, il giocatore vince un peluche, altrimenti ha perso».

2ª regola del gioco:

«Il giocatore lancia un dado: se ottiene un 6, ha vinto un peluche, altrimenti ha diritto a rilanciare il dado e vince il peluche se ottiene un 6, altrimenti ha perso».

È più vantaggioso scegliere la 1ª regola o la 2ª seconda regola?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Con un dado normale lanciato due volte, confrontare le possibilità di ottenere una somma di punti maggiore o uguale a 9 o di ottenere almeno un 6.

Analisi del compito

- Comprendere che gettando due volte un dado si possono ottenere 6 × 6 = 36 coppie possibili di facce del dado e che tutte queste coppie hanno la stessa possibilità di presentarsi: 1/36.
- Capire che per rispondere alla domanda è necessario contare i casi che fanno vincere il peluche quando si segue la regola n° 1 o quando si segue la regola n° 2.
- Individuare le 10 coppie la cui somma è uguale a 9: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3); la cui somma è uguale a 10: (4, 6), (5, 5), (6, 4); la cui somma è uguale a 11: (6, 5), (5, 6); la cui somma è uguale a 12: (6, 6). Dedurne che ci sono 10 possibilità su 36 di vincere il peluche con questa regola.
- Quando si segue la 2a regola, contare le coppie di facce che fanno perdere: quelle che non presentano la faccia 6. Trovarne 25 (5 × 5). Concludere che ci sono 25 possibilità di perdere su 36. Dedurne che ci sono 36 − 25 = 11 possibilità di vincere su 36.
- Concludere che 10/36 è inferiore a 11/36 e che quindi è più vantaggioso scegliere la 2a regola.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (2ª regola) con un resoconto chiaro dei diversi casi possibili e del modo di fare i calcoli (ottenere per la 1ª regola 10 possibilità su 36 di vincere, o probabilità 10/36 ed ottenere per la 2ª regola 11 possibilità su 36 di vincere, o probabilità 11/36)

3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o incompleta

2 Calcolata correttamente una sola delle due probabilità con spiegazione

1 Errore di conteggio ma procedura corretta (per esempio: 12 possibilità su 36 contando due volte il doppio 6) per almeno una delle due situazioni
oppure elenco dettagliato delle 36 coppie possibili

0 Incomprensione del problema
oppure la risposta «scegliere la 2ª regola» senza alcuna spiegazione

Livello: 8, 9, 10

Origine: Franche-Comté

18. NASTRO TRASPORTATORE (Cat. 8, 9, 10)

In una stazione della metropolitana di Parigi, Marc e Samira avanzano insieme alla stessa velocità di 4 km/h quando davanti ad essi si presentano due possibilità: o prendere un nastro trasportatore lungo 250 m che avanza a 5 km/h, o continuare a camminare nel corridoio accanto a questo nastro trasportatore. Marc decide di prendere il nastro trasportatore e di restarci immobile durante lo spostamento, mentre Samira continua a camminare nel corridoio.

A quale distanza da Samira si trova Marc quando arriva alla fine del nastro trasportatore?

Mostrate i calcoli che avete fatto per trovare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare la differenza delle distanze percorse da due persone in uno stesso tempo, conoscendo le loro velocità (5 km/h e 4 km/h) e la distanza (250 m) percorsa dalla persona più rapida.

Analisi del compito

- A partire dalla formula v = s/t, calcolare il tempo impiegato da Marc conoscendo la distanza 250 m e la velocità del nastro trasportatore 5 km/h, che dà 5 = 0.250/h da cui h = 1/20 d'ora, cioè 3 minuti.
- A partire dalla formula v = s/t, calcolare la distanza percorsa da Samira in questi 3 minuti o 1/20 d'ora: 4 = s/1/20 da cui s = 4/20 di km, cioè 200 m.
  Essendo Marc avanzato di 250 m e Samira di 200 m, Marc si trova a 50 m da Samira.

Oppure (i dati semplici si prestano a calcoli di proporzionalità)

- Il nastro avanza a 5 km/h cioè 5000 m in 60 minuti, quindi per fare 1000 m occorrono 12 min e per 250 m occorrono 12/4, cioè 3 min. Samira che cammina a 4 km/h, cioè 4000 m in 60 minuti, durante 3 minuti, cioè 20 volte meno, farà 4000/20 = 200 m.
- Concludere calcolando la differenza 250 – 200 = 50 m.

Oppure

- Il rapporto delle velocità è 4/5, quindi la distanza percorsa da Samira è 4/5 di quella di Marc: mentre Marc percorre 250 m, Samira percorre solamente 200 m, restando indietro di 50 m.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (50 m) con una spiegazione chiara della procedura seguita e presenza dei calcoli

3 Risposta corretta ma non tutti i calcoli sono esplicitati o la spiegazione non è chiara

2 Risposta corretta senza spiegazioni
oppure risposta errata per un errore di calcolo o di cambiamento di unità di misura, con un ragionamento corretto

1 Inizio di calcoli coerenti con la formula v = s/t che non hanno portato ad una risposta

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Franche-Comté

19. LA FORESTA DI TRANSALPINIA (Cat. 9, 10)

La regione di Transalpinia possedeva nel suo territorio una foresta di 200 km² di superficie.

Una parte di essa non ha sopportato l'ultima siccità e così la superficie della foresta si è ridotta del 50%.

Gli abitanti decidono di ripiantare un'altra varietà di alberi che favorisca la riproduzione di tutta la foresta.

A partire dal momento in cui è presa la decisione, ogni anno, la superficie della foresta aumenterà dell'8% della superficie dell'anno precedente.

In quanti anni la foresta ritroverà la sua superficie iniziale (con un'approssimazione di pochi chilometri quadrati)?

Continuando con questo ritmo, in quanti anni la superficie della foresta arriverà a 800 km² (con un'approssimazione di pochi chilometri quadrati)?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Calcolare in quanti anni una superficie sarà raddoppiata e in quanti anni sarà moltiplicata per 8, sapendo che aumenta ogni anno dell'8%.

Analisi del compito

- Comprendere che l'area della foresta diminuisce del 50% e quindi raggiunge un valore di 100 km²
- Comprendere che l'aumento (8%) è calcolato su un valore che cambia ogni anno e che i calcoli si fanno a partire da 100 km², cioè il 50% di 200 km²
- Fare i calcoli successivi per ogni anno e rappresentarli, per esempio, in una tabella come quella riportata sotto

Anno	Area all'inizio dell'anno	8% del valore	Area alla fine dell'anno
1	100	8	108
2	108	8.64	116.64
3	116.64	9.33	125.97
4	125.97	10.08	136.05
5	136.05	10.88	146.93
6	146.93	11.67	158.6
7	158.6	12.69	171.29
8	171.29	13.7	184.99
9	184.99	14.8	199.79

- Dedurre che al termine dei 9 anni dopo il nuovo impianto l'area ha raggiunto il valore iniziale di 200 km².
- Il calcolo del numero di anni necessari perché l'area sia di 800 km², cioè 4 volte il suo valore dopo il 9° anno, può essere fatto considerando che il suo valore raddoppia ogni 9 anni, quindi dopo 18 anni sarà di 400 km² e dopo 27 anni 800 km², da cui la risposta: 27 anni a partire dal nuovo impianto.
- Si può usare una calcolatrice oppure un foglio di calcolo se si è osservato che un aumento dell'8% di un valore corrisponde a moltiplicare il valore stesso per 1,08.

  Per rispondere alla prima domanda, bisogna utilizzare il fattore moltiplicativo costante di una calcolatrice ed annotare i differenti risultati della sequenza ottenuta, fermandosi a 199,90 oppure utilizzare un foglio di calcolo che giunga allo stesso risultato.

Oppure

- Si possono anche utilizzare questi differenti strumenti per risolvere l'equazione: $200 = 100 \times 1.08^n$ dove n indica il numero di anni

  Si applica lo stesso principio per rispondere alla seconda domanda.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette (9 anni, 27 anni) con spiegazioni chiare o con una tabella e indicati i calcoli

3 Risposte corrette con spiegazioni incomplete

2 Una sola risposta corretta (9 anni) con spiegazioni chiare o risposta (10 anni, 30 anni)
oppure risposta corretta senza alcuna spiegazione o calcolo (per esempio “dopo molti calcoli abbiamo trovato…”)

1 Inizio di ricerca coerente, per esempio il calcolo corretto delle aree dei primi anni

0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Franche-Comté

20. QUADRATO MAGICO (Cat. 9, 10)

Nelle caselle del quadrato qui sotto, devono essere inseriti tutti i numeri da 1 a 16 in modo che la somma di quattro di essi situati su una stessa riga o su una stessa colonna o sulle diagonali sia sempre la stessa.

Sono già stati scritti i numeri 3, 6, 10, 12, 13 e 15

12	6	15	
13	3	10	

Completate questo quadrato con i numeri mancanti.

Spiegate in modo dettagliato la vostra procedura.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

In un quadrato magico di ordine 4 in cui sono già stati scritti tre numeri su una riga e tre numeri su un'altra, ricavare il valore (34) della somma costante degli elementi su una qualunque riga, colonna o diagonale e completarlo in modo che nelle caselle figurino tutti i numeri da 1 a 16.

Analisi del compito

- Comprendere che per completare il quadrato occorre inserire tutti i numeri da 1 a 16 in modo che sia costante la somma sulle righe, colonne e diagonali e che ciascuno di essi compaia una sola volta.
- Comprendere che questo valore costante si ottiene dividendo per 4 la somma totale dei numeri da 1 a 16; ricavare che è 34.
- Osservare le prime due righe e completarle (la prima con 1, la seconda con 8).
- Una volta terminata la seconda riga, continuare a cercare di completare una delle colonne o una diagonale.

Ci sono diversi modi per farlo:

- ad esempio, notare che la somma dei numeri su due colonne (la seconda e la quarta) è 9 mentre sulle altre due, è 25. Iniziare a riempire le colonne con la somma più grande. In queste colonne, per arrivare a 34, è necessario aggiungere due numeri, la cui somma sia 9: 7 + 2 o 5 + 4 (6 + 3 e 8 + 1 non sono possibili perché 6, 3, 1 e 8 sono già stati utilizzati). Rendersi conto che nella terza colonna non si può avere (7, 2) né (2, 7) perché, per completare la diagonale principale, nel primo caso si dovrebbe usare 12 (che è già stato utilizzato), e nel secondo caso 17 (ma questo numero non è consentito).
- Concludere che i due numeri da aggiungere nella terza colonna sono 5 e 4. Controllare che devono essere in questo ordine perché altrimenti la diagonale principale dovrebbe essere completata con 5 che è già utilizzato.
- Trovare poi il numero mancante sulla diagonale principale (14) e quindi completare la quarta colonna con 11. Restano quattro numeri da posizionare (2, 7, 9 e 16); nella seconda colonna, manca 25 per ottenere la costante 34. Il 25 può essere ottenuto solo da 16 e 9, ma il 16 non può stare sulla quarta riga perché altrimenti non sarebbe possibile completarla per ottenere 34; 16 si trova quindi sulla terza riga della seconda colonna.
- Il quadrato può quindi essere completato con: il 9 nella riga 4, colonna 2; poi il 2 nella riga 3, colonna 1; infine il 7 nella riga 4, colonna 1.

Oppure

- Iniziare cercando di posizionare il numero più grande, 16.
- Osservare che il 16 non può essere inserito nella prima colonna (12 + 13 + 16 = 41) né nella terza colonna (15 + 10 + 16 = 41), sarà quindi nella seconda o nella quarta colonna.
- Procedere quindi con un ragionamento del tipo descritto sopra (per esempio: 16 non può essere nella riga 4, colonna 4, perché, per completare la diagonale principale, si dovrebbe inserire 3 nella riga 3, colonna 3 ed il 3 è già utilizzato; allo stesso modo, 16 non può essere nella riga 3, colonna 4 perché, per completare la colonna 4, si dovrebbe posizionare 9 nella riga 4 , colonna 4 e poi, per completare la diagonale principale, si dovrebbe mettere 10 nella riga 3, colonna 3, ma il 10 è già utilizzato).

Oppure

- Iniziare cercando di inserire il numero più piccolo, 2.

- Osservare che il 2 non può essere posizionato né in seconda colonna (6 + 3 + 2 = 11), né in quarta colonna (1 + 8 + 2 = 11), perché sarebbe necessario scrivere 23 per completare la colonna e 23 non è consentito; il 2 sarà quindi nella prima o nella terza colonna.
- Quindi procedere con un ragionamento del tipo descritto in precedenza.

In ogni caso, completare il quadrato come mostrato di seguito:

12	6	15	1
13	3	10	8
2	16	5	11
7	9	4	14

Attribuzione dei punteggi

4 Quadrato completato correttamente, con spiegazione dettagliata della procedura seguita che mostra l'unicità della soluzione

3 Quadrato completato correttamente con solo qualche passaggio spiegato, ma senza evidenziare l'unicità della soluzione

2 Quadrato completato correttamente senza alcuna spiegazione
oppure inizio di risoluzione: 4 nuove caselle riempite correttamente con spiegazione

1 Inizio di risoluzione: identificato il valore 34 e fatti alcuni tentativi che tengono conto delle somme dei numeri mancanti su righe, colonne e diagonali

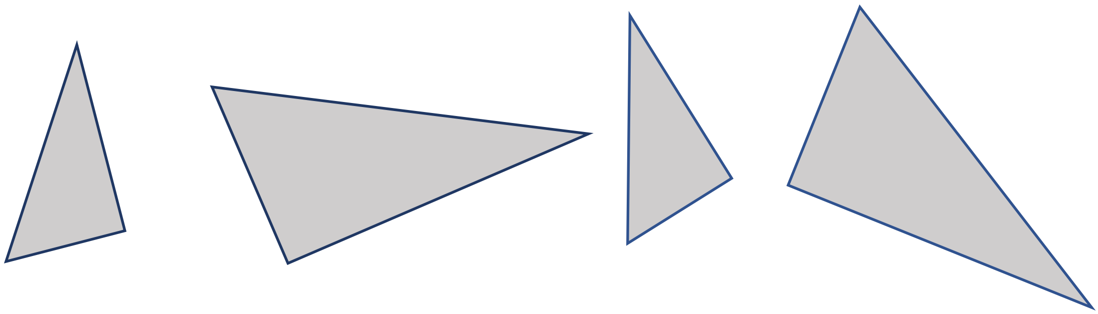
0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Franche-Comté

21. UN PUZZLE (II) (Cat. 9, 10)

Un puzzle si compone di quattro pezzi a forma di triangolo rettangolo, uguali a due a due. Tutti i triangoli sono simili e il cateto maggiore dei triangoli piccoli è uguale al cateto minore dei triangoli grandi.



Utilizzando ogni volta tutti e quattro i pezzi si possono realizzare numerose figure tra cui due rettangoli con perimetri diversi.

Calcolate la misura dei perimetri dei due rettangoli nel caso in cui le ipotenuse dei triangoli piccoli e grandi siano rispettivamente 9 cm e 12 cm.

Spiegate il vostro procedimento.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Costruire due rettangoli diversi utilizzando per ciascuno di essi quattro triangoli rettangoli simili, congruenti due a due, con il cateto maggiore del triangolo più piccolo uguale al cateto minore del triangolo più grande e calcolarne i perimetri conoscendo le misure delle ipotenuse.

Analisi del compito

- Comprendere le caratteristiche dei triangoli rettangoli dati e che con essi si devono formare due rettangoli con perimetro diverso, utilizzandoli ogni volta tutti.
- Ricordare che in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari.
- Considerare che un rettangolo è un quadrilatero con quattro angoli retti che potranno essere o quelli dei triangoli dati o quelli ottenuti come somma di due angoli complementari.
- Provare a costruire i due rettangoli (con il disegno o con il ritaglio). Si può procedere in due modi.
  - Accostare lungo le ipotenuse i due triangoli piccoli e i due triangoli grandi formando due rettangoli. Osservare che questi due rettangoli hanno un lato della stessa lunghezza, accostarli lungo tale lato ed ottenere un unico rettangolo "grande" (come quello in figura 1 o figura 2 oppure altri ottenuti per simmetria assiale rispetto ai lati di questo rettangolo)

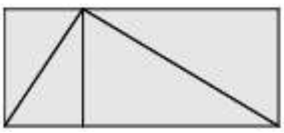


figura 1

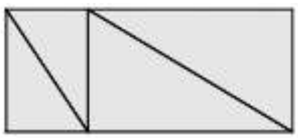


figura 2

  - Accostare un triangolo piccolo ad uno grande facendo combaciare i cateti congruenti. Osservare che con i quattro pezzi si ottengono così due triangoli rettangoli perché i due angoli che vengono accostati sono complementari. I cateti dei triangoli rettangoli ottenuti sono le ipotenuse dei triangoli dati.

Accostare infine questi due triangoli lungo le ipotenuse ed ottenere l'altro rettangolo come mostrato in figura 3.

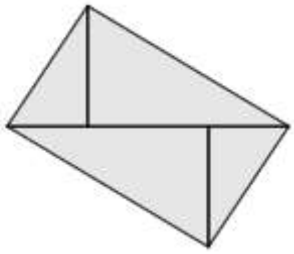


figura 3

- Passare quindi a calcolare i perimetri.
- Nel rettangolo di figura 1 il lato maggiore è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ottenuto accostando un triangolo piccolo e uno grande e il lato minore è l'altezza relativa all'ipotenusa di questo triangolo. Utilizzare il Teorema di Pitagora per determinare l'ipotenusa: $12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$ e quindi trovare che misura 15 cm. Per determinare la misura dell'altro lato del rettangolo (anche altezza relativa all'ipotenusa) calcolare la doppia area del triangolo rettangolo (cateto per cateto) e dividere per l'ipotenusa: 12 × 9 ÷ 15 = 7,2. Calcolare il perimetro del rettangolo: 2 × (15 + 7,2) = 44,4 in cm.
- Nel rettangolo di figura 2 occorre ricordare che tutti i triangoli sono simili e, in particolare, che il rapporto di similitudine tra il piccolo e il grande è 9/12 = 3/4. Indicata con x la misura del cateto maggiore del triangolo piccolo, uguale al cateto minore del triangolo grande, il cateto maggiore del triangolo grande è dato da: $\sqrt{12^2 - x^2}$. Per trovare il valore di x impostare quindi la proporzione: $9 : 12 = x : \sqrt{12^2 - x^2}$ da cui: $12x = 9\sqrt{12^2 - x^2}$, $x = 3/4\sqrt{12^2 - x^2}$, $x^2 = \frac{9}{16}(144 - x^2)$ da cui $25x^2 = 1296$ e $x = 7,2$. Applicare poi il Teorema di Pitagora per trovare i due cateti che formano il lato maggiore del rettangolo e ottenere 15 (= 5,4 + 9,6).
- Nel rettangolo di figura 3, osservare che i suoi lati sono proprio le ipotenuse dei triangoli rettangoli dati e quindi il perimetro è 2 × (12 + 9) = 42 in cm.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (42 cm e 44,4 cm) con spiegazioni chiare e complete della procedura utilizzata (disegno dei due rettangoli con la corretta disposizione dei triangoli rettangoli e dettaglio del calcolo dei perimetri)

3 Risposta corretta con spiegazioni parziali o poco chiare (ad esempio non ben esplicitati e spiegati tutti i calcoli o disegno incompleto in cui non si vedono chiaramente come sono disposti i triangoli rettangoli)
oppure risposta errata dovuta a un errore di calcolo ma disegno chiaro dei due rettangoli e dei loro componenti e procedimento corretto

2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure costruito un solo rettangolo e determinato correttamente il suo perimetro con dettaglio dei calcoli

1 Inizio di ricerca coerente con costruzione di un rettangolo
oppure risposta 42 cm senza alcuna spiegazione

0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Milano