

# Costruire e valutare competenze con i problemi del RMT

Andrea Maffia  
andrea.maffia@unibo.it



**Perché insegniamo la matematica?**



# Justification problem

- La matematica è davvero per tutti?
- Occorre insegnarla proprio a tutti?
- Ha senso che la società investa risorse per garantire l'insegnamento della matematica per tutti?
- Ha senso per lo studente dover studiare matematica durante tutto il suo percorso scolastico a prescindere dalle sue aspirazioni?
- Quale **padronanza** della matematica ha senso per tutti?

# Una metafora

*Si immaginino due gruppi di studenti a cui viene insegnata musica come se fosse una materia da far con carta e penna. Viene loro mostrato il pentagramma con quel segno riccioluto all'inizio; viene spiegato che i segni sulle linee si chiamano Mi, Sol, Si, Re, Fa mentre quelli fra linee sono detti Fa, La, Do, Mi. Imparano che una linea con un ovale bianco è chiamata minima e che corrisponde a due con l'ovale annerito, dette semiminime o a quattro con l'ovale annerito e una coda dette crome e così via – delle tabelline musicali se si vuole. Per un gruppo di bambini, l'apprendimento sarà questo e nient'altro. Se hanno una lezione di musica al giorno, cinque giorni per ogni settimana e viene detto loro che questa cosa è importante, probabilmente nel tempo impareranno a scrivere i segni necessari per semplici melodie [...] Lo troveranno noioso e le regole da memorizzare saranno così numerose che problemi del tipo “scrivi un semplice accompagnamento per questa melodia” saranno troppo difficili per la maggior parte di loro. [...]*

# Una metafora

*All'altro gruppo invece viene richiesto di associare alcuni suoni a questi segni sulla carta. Per i primi anni si tratta di suoni orecchiabili, che possono produrre da soli con semplici strumenti. Col passare del tempo potranno immaginare quei suoni ogniqualvolta ne vedranno o scriveranno il simbolo sulla carta. [...] Viene coinvolta molta meno memoria e ciò che deve essere ricordato è soprattutto nella forma di interi (come melodie) che le loro [dei bambini] memorie riescono a conservare più facilmente. Esercizi come quelli menzionati prima (“Scrivi un semplice accompagnamento”) saranno a portata dei più.*

Skemp, 1987, p. 157

# Comprensione relazionale o strumentale

**Comprensione  
strumentale**

Rules without the reasons

**Comprensione  
relazionale**

Knowing both what to do and why

# Comprensione relazionale o strumentale

**Comprensione  
strumentale**

$$5 + 6 = 11 + 4 = 15$$

**Comprensione  
relazionale**

$$5 + 6 = 11 = 15 - 4$$

# Vantaggi dell'apprendimento relazionale

È vantaggioso per la **memoria a lungo termine**. Di fatto, se apprendere conoscendo i complessi significati che si trovano alla base della matematica elementare risulta più complesso rispetto all'automatizzazione di procedure, è anche vero che la conoscenza delle relazioni che ci sono fra le procedure stesse permette di ricostruire una a partire da un'altra: è necessario meno ri-apprendimento il che risulta vantaggioso complessivamente nel lungo termine

In altre parole: se una nuova informazione appresa viene collegata con diverse informazioni già presenti in memoria, allora è più probabile richiamarla (a partire da una qualsiasi delle informazioni a essa collegata) in un secondo momento. La costruzione di tali collegamenti, sebbene vantaggiosa, richiede una specifica istruzione che può risultare più complessa

# KOM Project

Mogens Niss – a partire dall'idea di padronanza linguistica (**literacy**)

- Padroneggiare un linguaggio significa saper usare diversi registri linguistici a seconda del contesto d'uso
- Le componenti della padronanza linguistica sono le stesse a prescindere dal livello scolastico
- Occorrono conoscenze relative a vocabolario, grammatica, ortografia... ma non sono sufficienti

# Il costrutto di *competenza*

*Capacità di far fronte ad un compito o a un insieme di compiti, riuscendo a mettere in moto e a orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive e volitive e a utilizzare le risorse esterne disponibili in modo coerente e fecondo*

(Pellerey, 2004, p. 12)

# Mathematical Literacy (Niss)

La *mathematical literacy* è l'abilità di capire, giudicare, fare e usare matematica in una varietà di contesti e situazioni (intra ed extra matematici) in cui la matematica gioca o potrebbe giocare un ruolo. Prerequisiti necessari ma non sufficienti per avere competenza matematica sono un certo numero di conoscenze di base e abilità tecniche

Niss, 2003, p. 7

# Mathematical Literacy (PISA 2003)

La *mathematical literacy* è l'abilità individuale di identificare il ruolo che la matematica gioca nel mondo, di operare valutazioni fondate, di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione

# Mathematical Literacy (PISA 2018)

La *mathematical literacy* è l'abilità individuale di formulare, usare e interpretare la matematica in una varietà di contesti. Include il ragionare matematicamente e usare i concetti, le procedure i fatti e gli strumenti della matematica per descrivere, spiegare e predire fenomeni. Assiste gli individui nel riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo e formulare giudizi e decisioni ben fondati, necessari per cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi.

# Competenza matematica (UE, 2007)

La competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, carte)

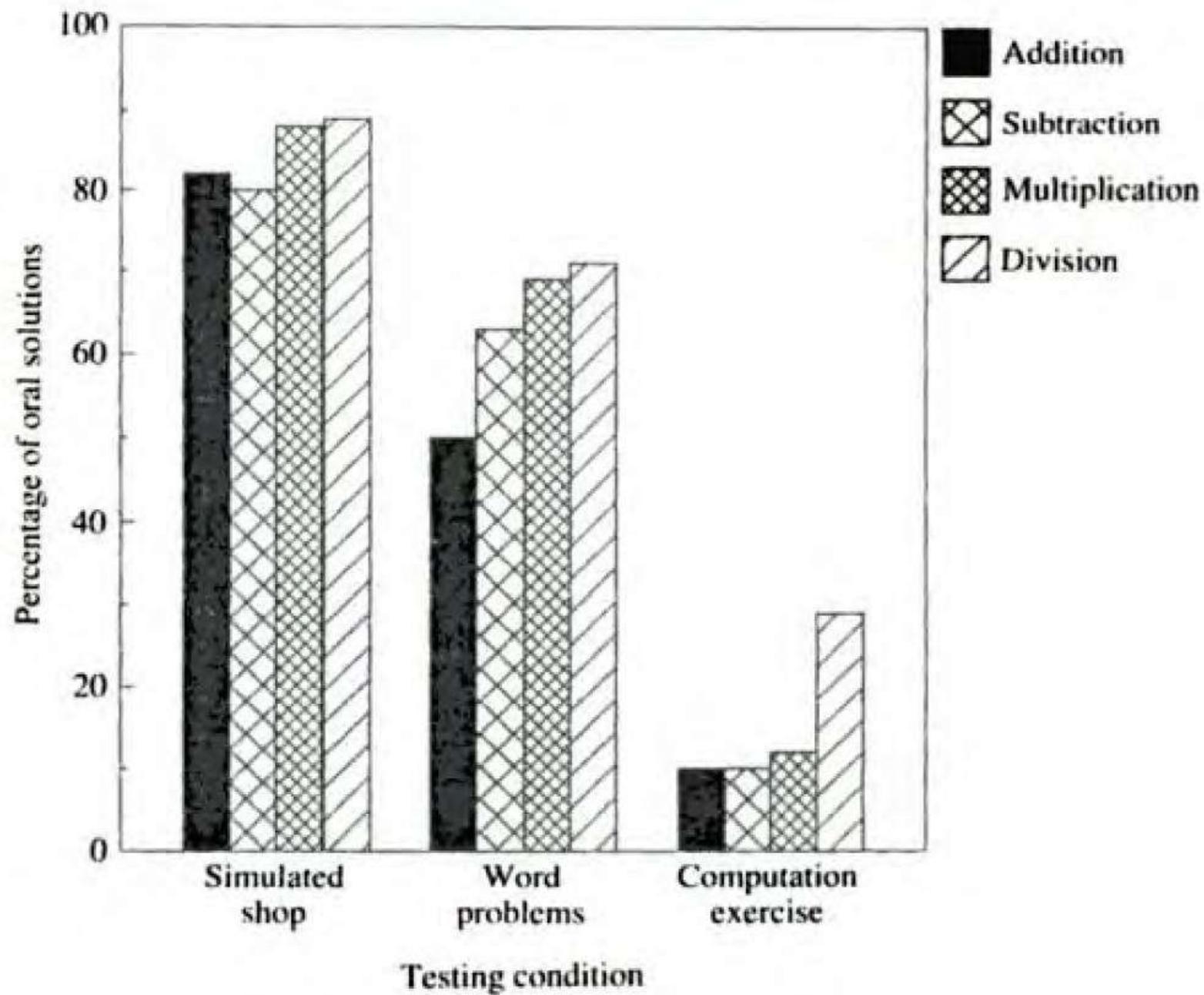
# School mathematics and street mathematics

Table 2.1. Results according to testing conditions

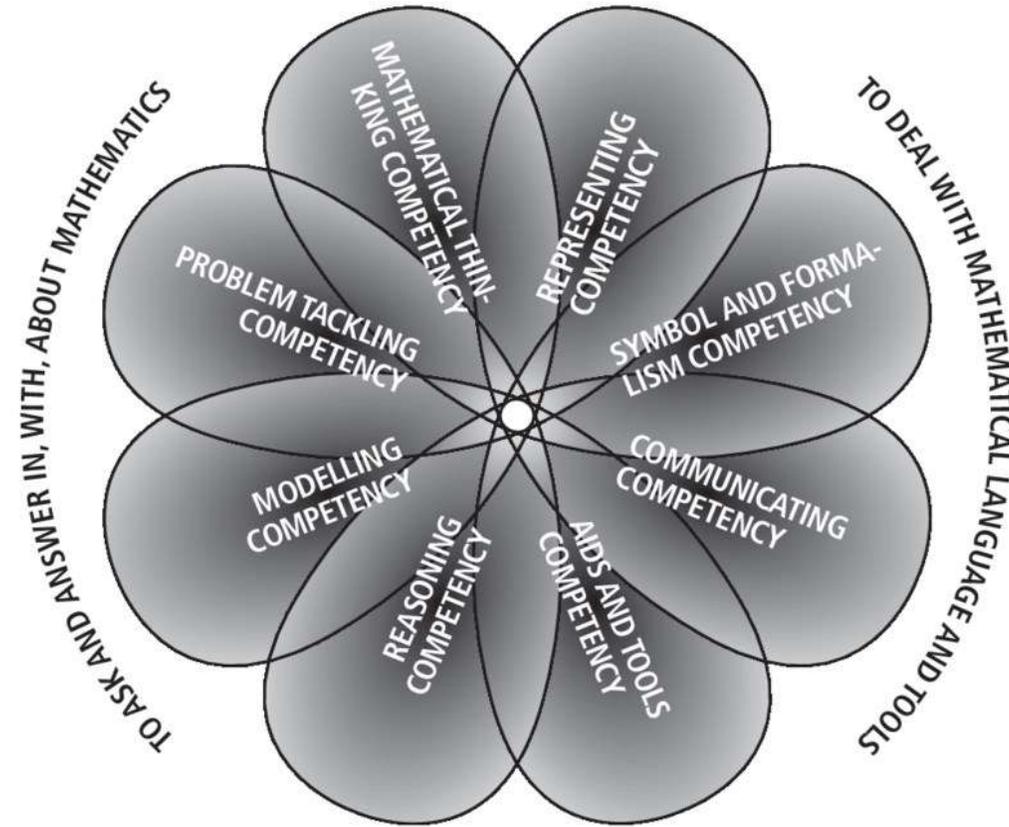
Subject	Informal test		Formal test			
	Score	No. of items	Arithmetic operations		Word problems	
			Score	No. of items	Score	No. of items
M	10	18	2.5	8	10	11
P	8.9	19	3.7	8	6.9	16
Pi	10	12	5.0	6	10	11
MD	10	7	1.0	10	3.3	12
S	10	7	8.3	6	7.3	11
Totals		63		38		61

Note: Scores are adjusted to a 10-point scale.



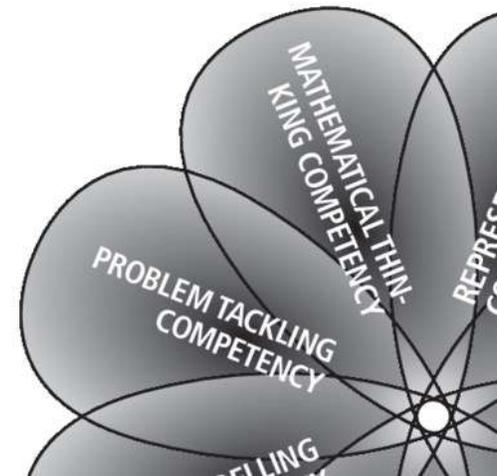


# Componenti della competenza



# Pensare matematicamente

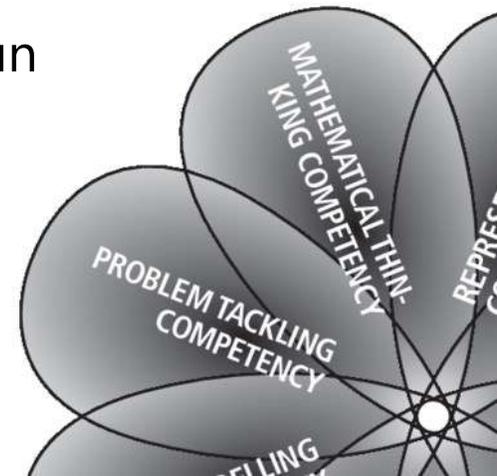
- Porre domande caratteristiche della matematica e conoscere i tipi di risposte (non necessariamente le risposte, ma il modo di ottenerle) che la matematica può offrire
- Comprendere e maneggiare lo scopo e i limiti di un certo concetto
- Estendere lo scopo di un concetto astraendone alcune proprietà; generalizzare risultati a classi di oggetti più ampie
- Distinguere diversi tipi di proposizioni matematiche (incluse implicazioni se-allora, proposizioni con quantificatori, assunti, definizioni, teoremi, congetture, casi)



# Pensare matematicamente

Per esempio, in molti libri si parla di 'regole' per la matematica, ma non si distingue tra definizioni, assiomi, teoremi, corollari, algoritmi

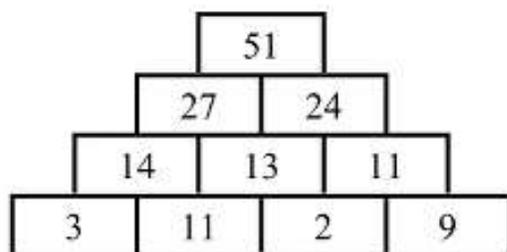
- **Definizione** introduce un oggetto matematico, associa il nome dell'oggetto matematico alle proprietà che lo caratterizzano in modo necessario e sufficiente
- **Assioma** proposizione che viene assunta convenzionalmente come vera
- **Teorema** enunciato che è vero perché dimostrato all'interno di una specifica teoria
- **Corollario** enunciato che diventa vero nel momento in cui viene dimostrato un teorema
- **Algoritmo** procedura (di calcolo, di disegno, ...) che in modo automatico (seguendo opportuni passi) restituisce un certo prodotto



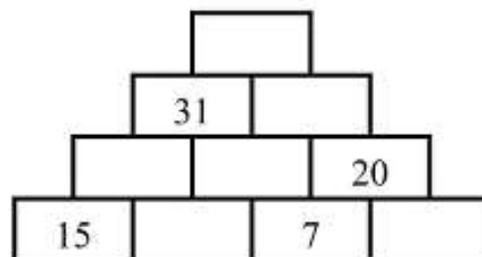
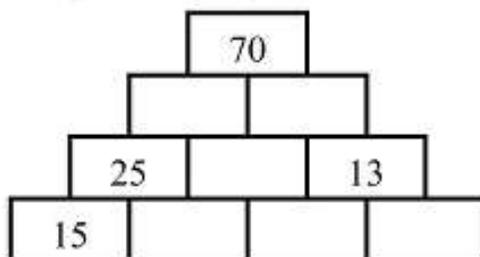
Matteo e Diego trovano questo problema su una rivista:

*In queste piramidi di mattoni, su ogni mattone si deve scrivere un numero secondo la seguente regola: su ogni mattone che si appoggia su due altri mattoni, il numero scritto è la somma dei numeri scritti sui due mattoni sui quali si appoggia.*

*Esempio:*



*Completare le due piramidi seguenti:*



Matteo e Diego cominciano allora a completare le due piramidi proposte.

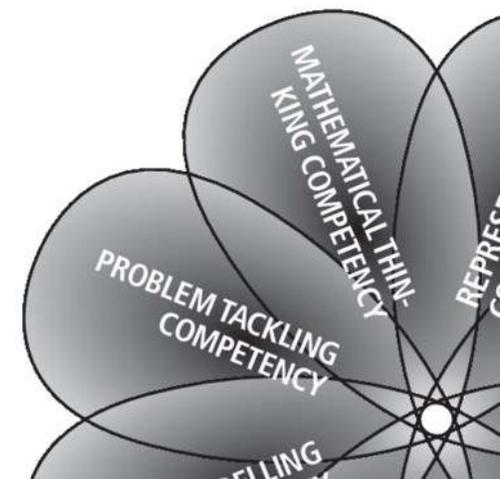
Quando confrontato i loro risultati osservano che hanno la stessa soluzione per la piramide di sinistra.

Matteo dice che non è possibile completare la piramide di destra. Invece Diego, molto soddisfatto di sé, afferma che ha trovato i numeri che gli permettono di completarla secondo la regola data.

**Completate anche voi le due piramidi.**

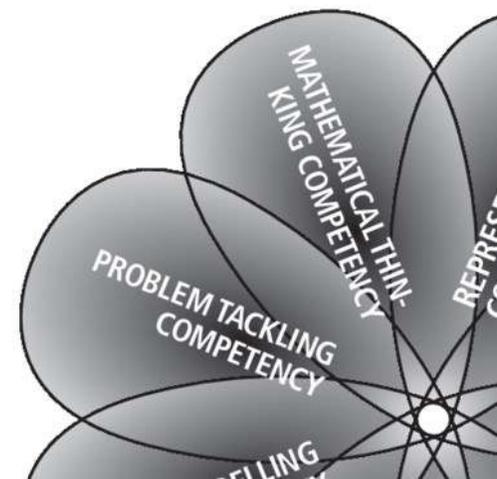
**Spiegate il ragionamento che avete fatto per trovare i numeri mancanti.**

# Pensare matematicamente



# Affrontare i problemi

- Identificare, porre e specificare diversi tipi di problemi matematici (puri o applicazioni, aperti o chiusi)
- Risolvere diversi tipi di problemi matematici (puri o applicazioni, aperti o chiusi) sia posti da altri che da se stessi e, quando opportuno, in modi diversi





# Affrontare i problemi

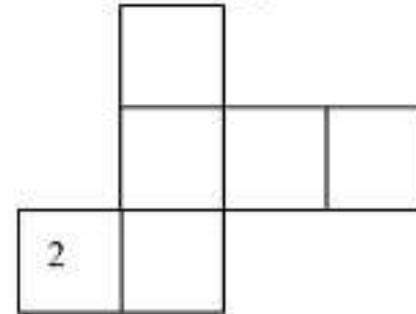
Marta ha perso i dadi del suo gioco da tavolo preferito.

Erano dadi speciali. Sulle loro facce:

- i numeri erano tutti diversi
- erano tutti numeri pari minori di 20.

I numeri, inoltre, erano disposti in modo tale che sulle facce opposte un numero fosse doppio dell'altro: ad esempio, se su una faccia c'era il numero 2, allora sulla faccia opposta c'era il numero 4.

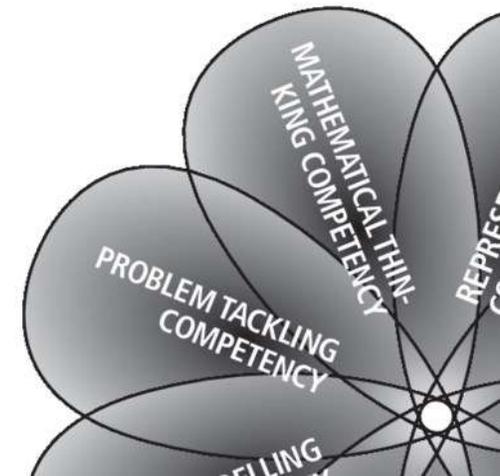
Per poter utilizzare ancora il suo gioco, Marta ha deciso di costruire i dadi con del cartoncino e ha preparato un modello da ritagliare, che è qui raffigurato, sul quale ha già sistemato il numero 2.



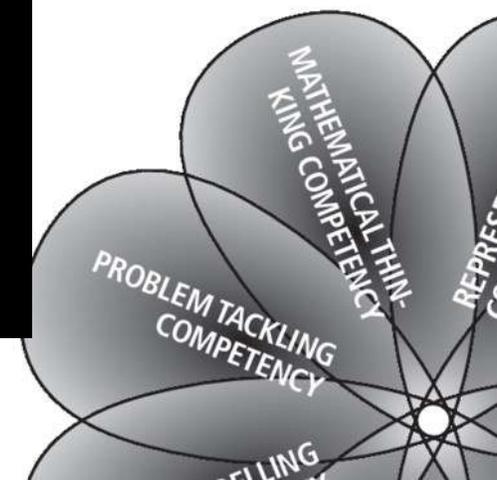
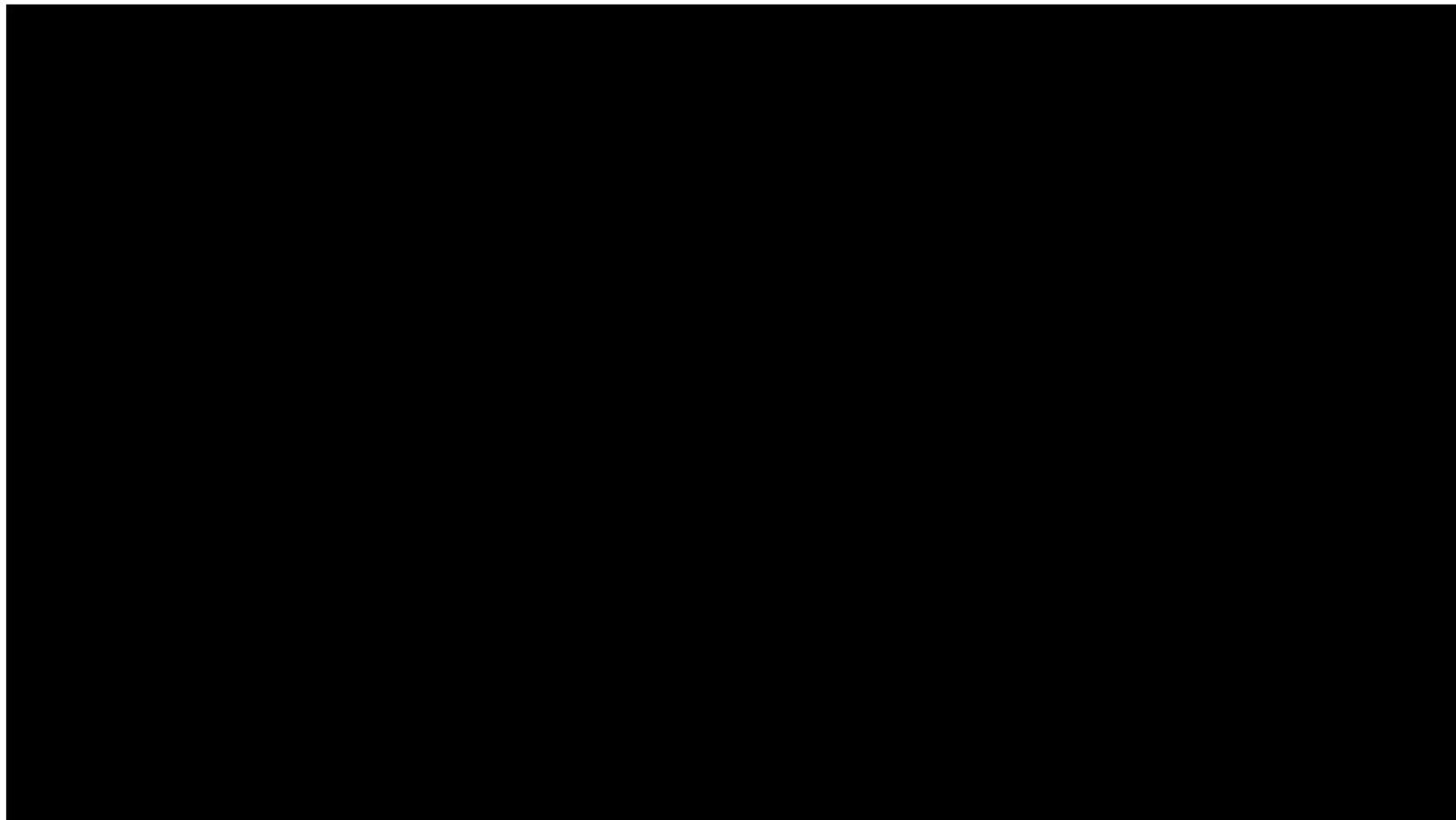
**Quali altri numeri potrà sistemare Marta sul modello del dado?**

**Disegnate tutte le disposizioni possibili degli altri cinque numeri su questo modello, facendo un disegno per ogni possibilità.**

**Spiegate come avete trovato i numeri.**

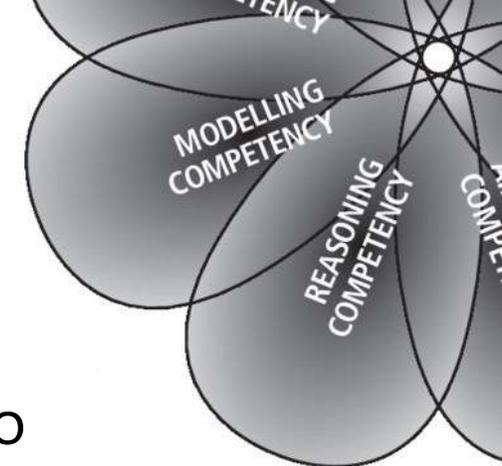


# Affrontare i problemi

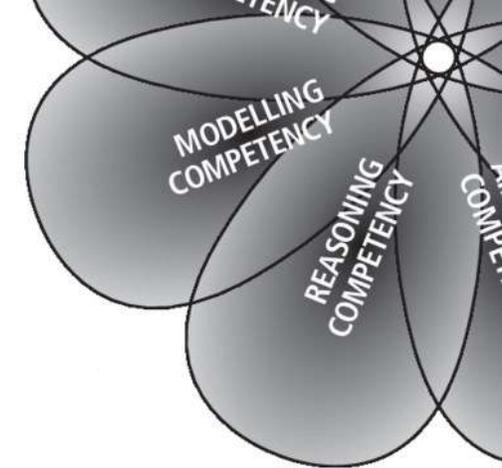


# Modellizzare matematicamente

- Analizzare i fondamenti e le proprietà di modelli esistenti, incluso valutarne la portata e la validità
- Decodificare modelli esistenti, per esempio tradurre e interpretare gli elementi del modello in termini della realtà modellizzata
- Realizzare attivamente una modellizzazione in un contesto dato (strutturare il campo, matematizzare, lavorare con/nel modello, rivolgere il problema che l'ha generato, validarlo internamente ed esternamente, analizzare e criticare il modello stesso e in confronto a modelli alternativi, comunicare circa il modello e i suoi risultati, monitorare e controllare il processo di modellizzazione)



# Modellizzare matematicamente

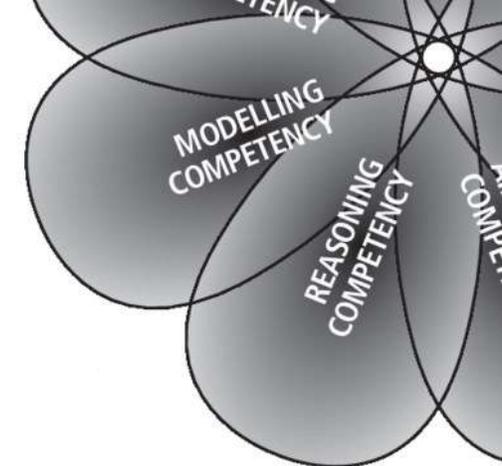


Galileo è vissuto tra il 1564 e il 1642, perciò ha vissuto

1642 – 1564 anni

Ovidio è vissuto tra il 43 a.C. e il 17 d.C, quanti anni ha vissuto?

# Modellizzare matematicamente



Guglielmo viaggia sull'autostrada A1 di Transalpino che va da Sudoku al sud del paese, a Nordicus al nord del paese, passando per la capitale, Transville.

Dopo aver lasciato Sudoku, passa davanti ad un cartello che indica:

*Transville 90 km - Nordicus 270 km*

*“Ah, una delle distanze è un terzo dell'altra!”* dice Guglielmo fra sé e sé.

Un po' più tardi, prima d'arrivare a Transville, Guglielmo vede un nuovo cartello che indica:

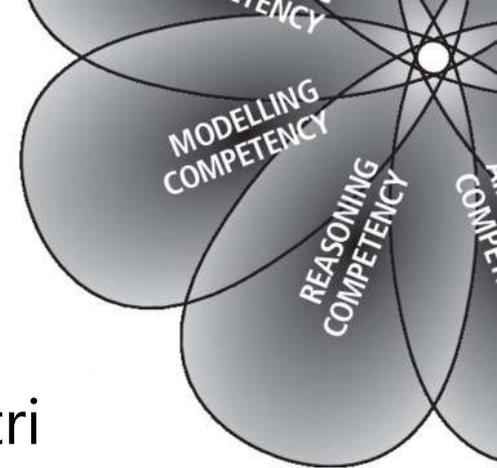
*Transville 25 km*

**A quale distanza da Nordicus si trova Guglielmo in quel momento ?**

**Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

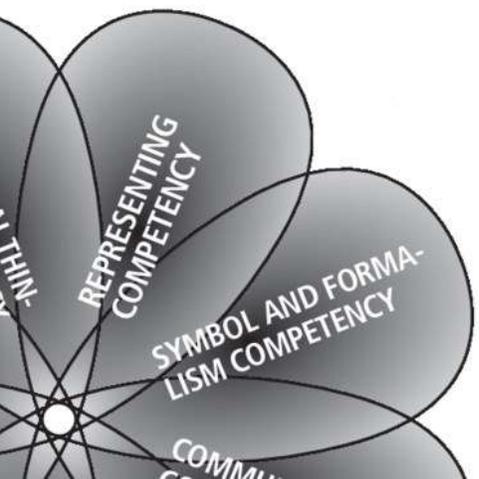
# Ragionare matematicamente

- Seguire e valutare una catena di argomentazioni realizzata da altri
- Conoscere cosa (non) è una dimostrazione matematica e in che modo differisce da altri tipi di ragionamento matematico (per es. euristiche)
- Rivelare le idee fondamentali in una linea di argomentazione (in particolare una dimostrazione) incluso distinguere gli argomenti principali dai dettagli, le idee dai tecnicismi
- Ideare argomentazioni matematiche formali e informali, trasformare argomentazioni euristiche in dimostrazioni valide, per es. dimostrando delle proposizioni



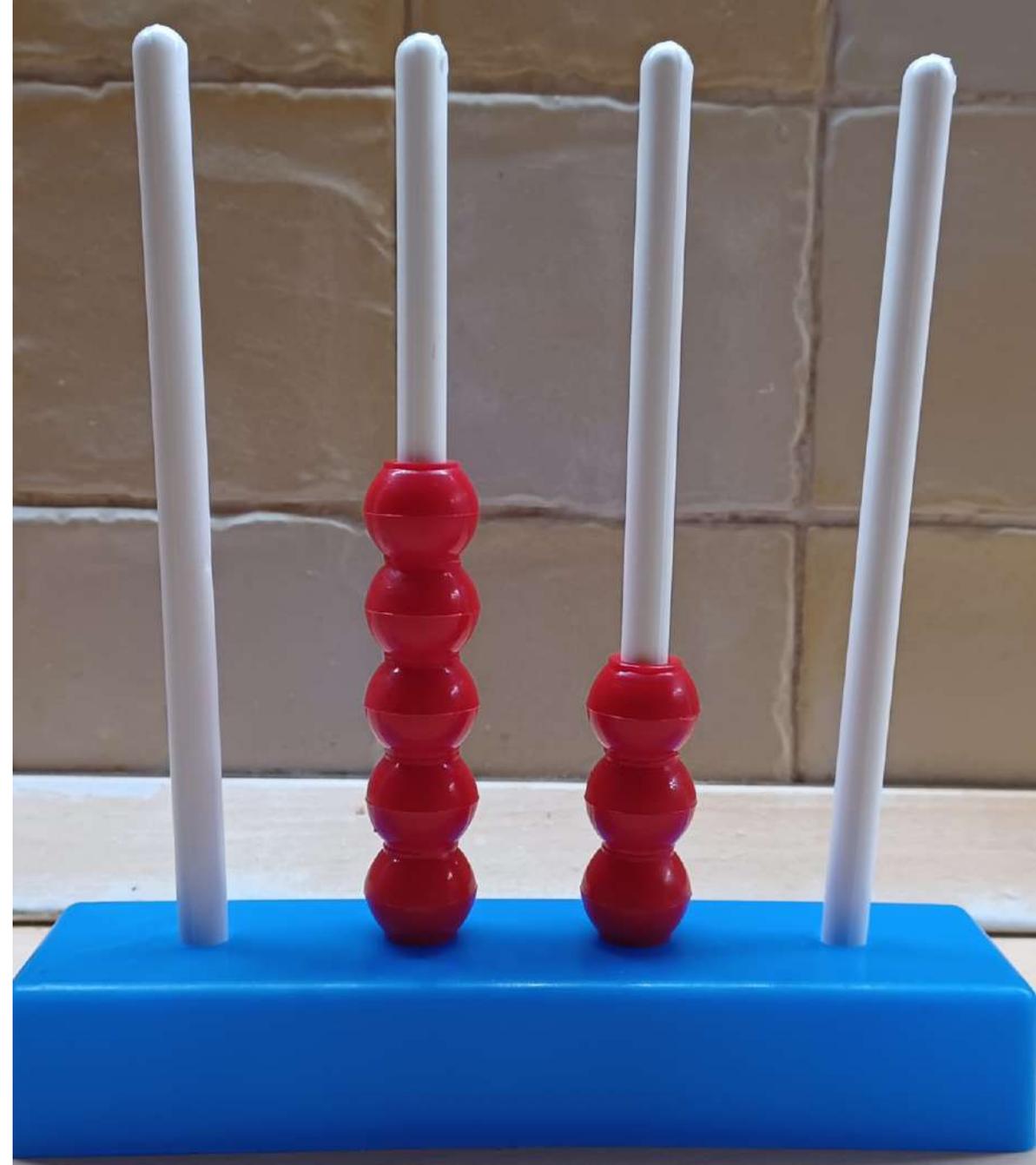
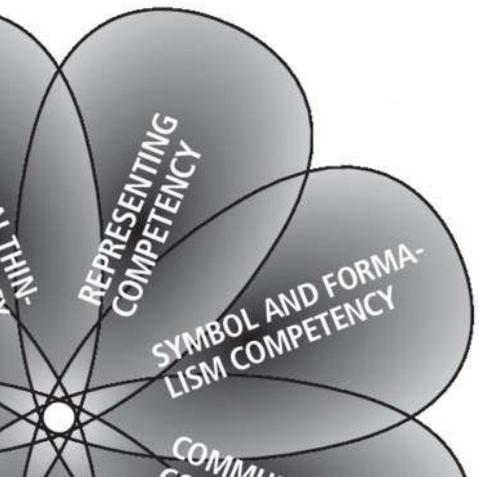
# Rappresentare le entità matematiche

- Comprendere ed utilizzare (tradurre, interpretare, distinguere) diversi tipi di rappresentazione degli oggetti, le situazioni e i fenomeni matematici
- Comprendere ed utilizzare le relazioni tra diverse rappresentazioni della stessa entità, incluso sapere le relative potenzialità e limiti
- Scegliere e realizzare conversioni tra diverse rappresentazioni



# Rappresentare le entità matematiche

530



# Rappresentare le entità matematiche

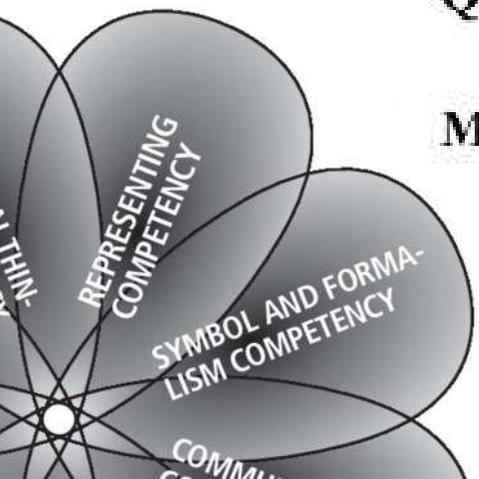
Isidoro sta scrivendo la successione dei numeri a partire da 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Ad un certo punto Isidoro scrive la cifra 3 per la venticinquesima volta.

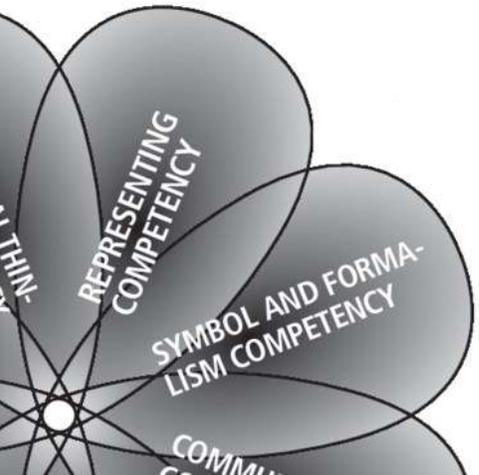
**Quale numero sta scrivendo Isidoro a quel punto?**

**Mostrate come lo avete trovato.**



# Manipolare i simboli matematici

- Tradurre e interpretare il linguaggio simbolico e formale della matematica e comprenderne le relazioni con il linguaggio verbale
- Comprendere la natura e le regole del Sistema formale matematico (sintassi e semantica)
- Tradurre dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico-formale
- Manipolare proposizioni ed espressioni che contengono simboli e formule



# Manipolare i simboli matematici

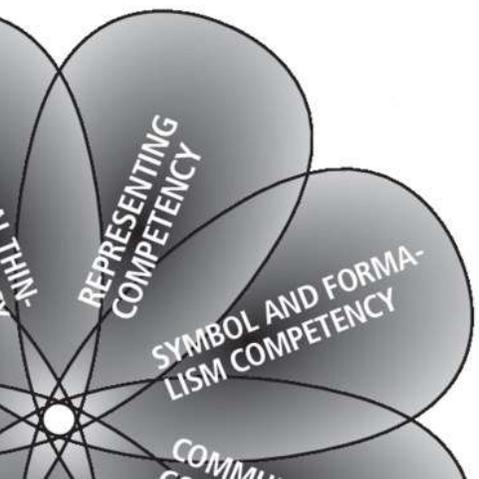
Luca è fermo al semaforo ed osserva la targa dell'auto che lo precede.

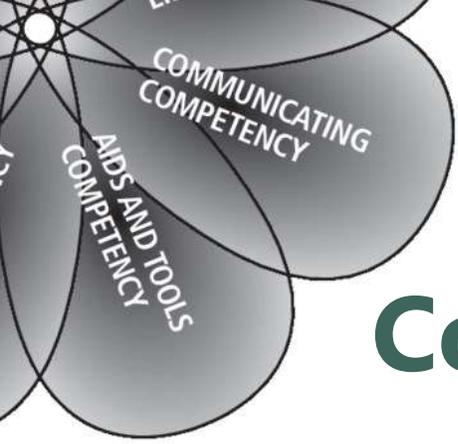
Vede che, oltre alle lettere, ci sono tre numeri ad una cifra, uno accanto all'altro, tutti diversi tra loro e tali che:

- la loro somma è proprio il doppio del numero centrale,
- il primo numero è il doppio del terzo.

**Quali possono essere i tre numeri che vede Luca?**

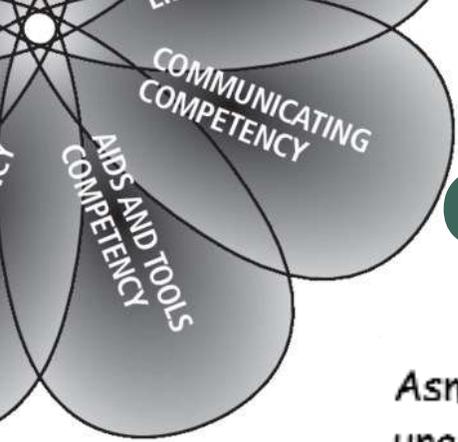
**Spiegate la vostra risposta.**





# Comunicare in, su e con la matematica

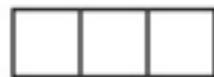
- Comprendere i testi (scritti, grafici, orali) degli altri in una varietà di registri linguistici a proposito di questioni aventi contenuto matematico
- Esprimersi, a diversi livelli di precisione tecnica e teorica, in forme orali, scritte e grafiche su tali questioni



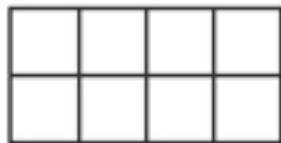
# Comunicare in, su e con la matematica

Asmine disegna una serie di griglie rispettando la seguente regola: per ogni nuova griglia aggiunge una riga e una colonna di quadretti alla griglia precedente.

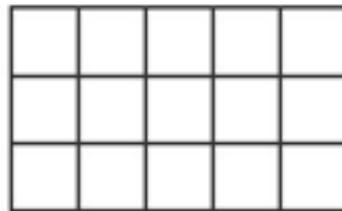
Queste sono le quattro griglie che ha già disegnato:



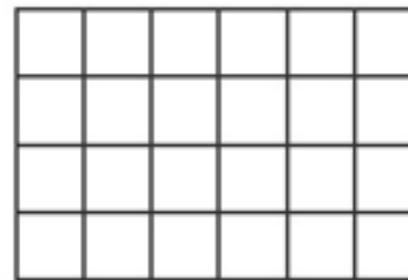
3 quadrati



8 quadrati



15 quadrati



24 quadrati

Continuando a costruire griglie rispettando la stessa regola, potrà costruire una griglia di esattamente 112 quadratini?

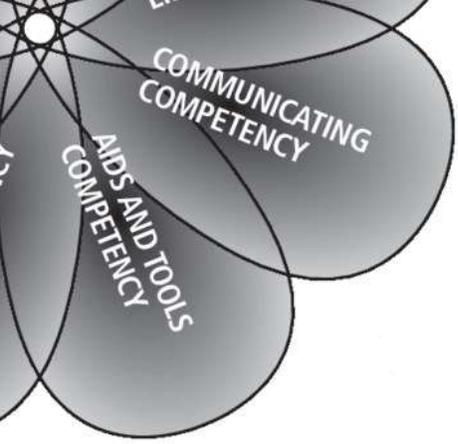
E una di esattamente 224?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

il testo

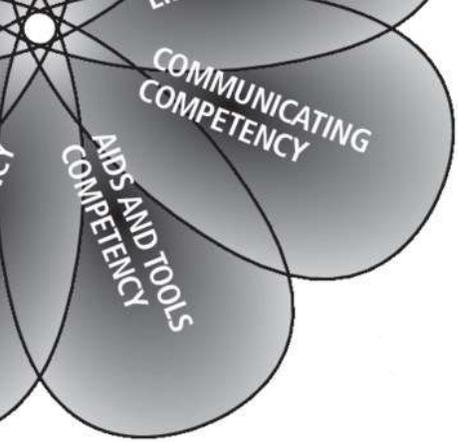
Come ha detto ~~del~~ problema, abbiamo calcolato la ~~riga~~ <sup>Partendo dal</sup> ~~riga~~ <sup>zuglia</sup> stessa dei 24 quadretti ~~x~~ e ~~x~~ <sup>gendo</sup> ~~aggiunte~~ una ~~riga~~ <sup>una colonna in</sup> ~~piu~~ ~~un~~ ~~quadretto~~. Abbiamo calcolato se veniva 112 e non è venuto perché:  $11 \times 9 = 99$  che quindi è più piccolo, allora dobbiamo aggiungere quindi è  $12 \times 10 = 120$ , è troppo grande, quindi non ~~lo~~ possiamo fare.

Per il 224 abbiamo fatto la stessa cosa, e c'è venuto 224 facendo l'operazione  $16 \times 14 = 224$ , quindi si può fare.

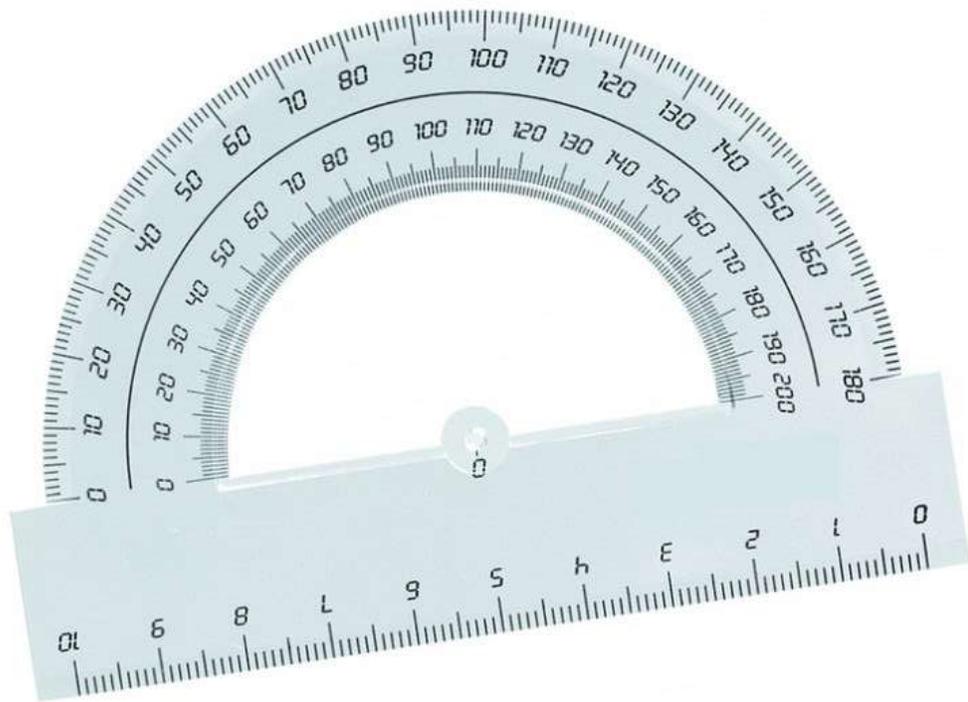


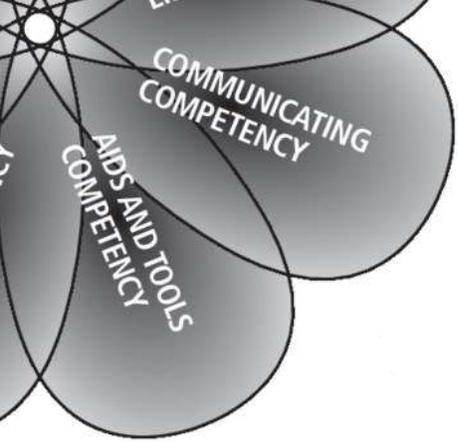
# Usare supporti e strumenti

- Conoscere l'esistenza e le proprietà di vari strumenti per le attività matematica, comprese le loro applicazioni e i loro limiti
- Essere in grado di usare tali strumenti in modo riflessivo



# Usare supporti e strumenti

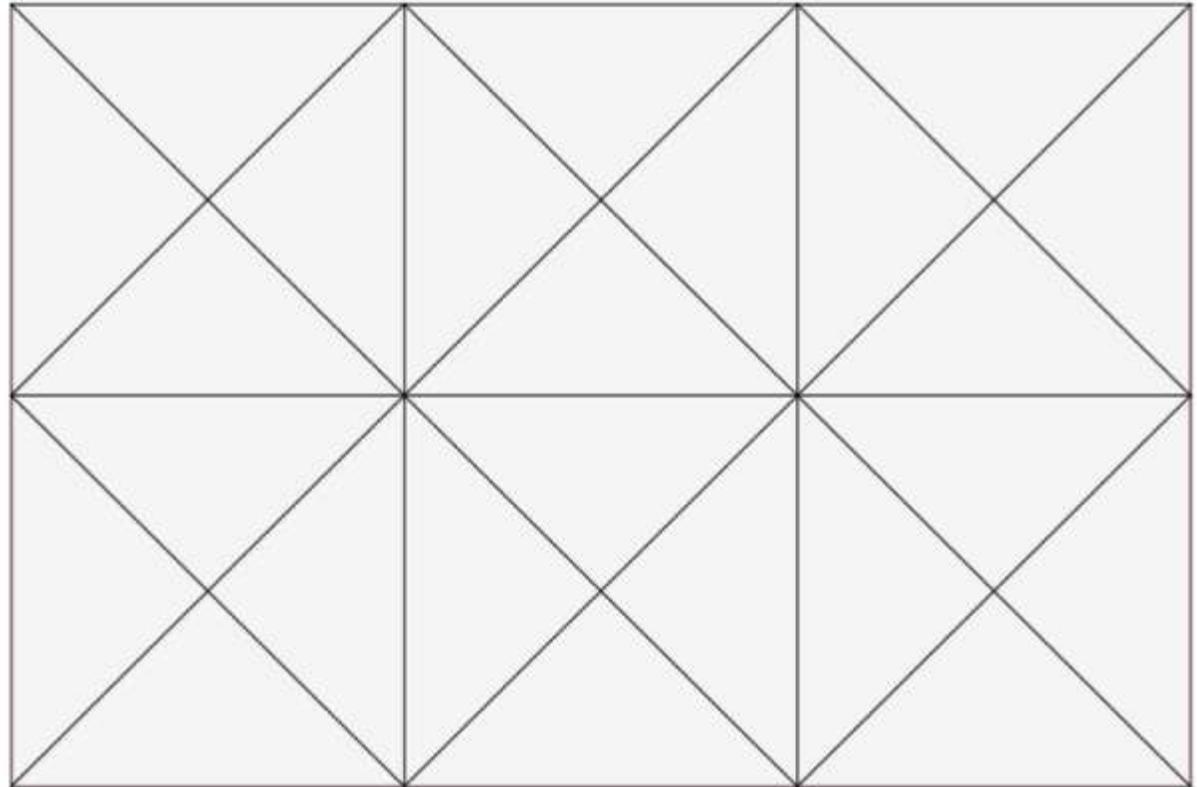




# Usare supporti e strumenti

Angela piega più volte un foglio di carta.

Quando lo riapre, vede che le piegature hanno formato questa figura:



Angela dice: "Vedo sei quadrati in questa figura"

Il suo amico Marco le risponde: "Io ne vedo molti di più"

**Quanti quadrati ci sono in questa figura?**

**Mostrate chiaramente tutti i quadrati che avete trovato.**

# Promuovere la competenza matematica

Sfide professionali per il docente (non episodiche)

- progettare attività che promuovano lo sviluppo di competenze
- identificare modalità di valutazione che ne accertino lo sviluppo