CALCOLO RAGIONATO

GIANFRANCO ARRIGO

ASSOCIAZIONE ITALIANA RALLY MATEMATICO ROZZANO
30 OTTOBRE 2025

Introduzione

Cenni storici sul calcolo numerico

Fino al XIII sec. (per più di 3 millenni): si calcola di solito con l'**abaco** nato in Cina e in Giappone, usato anche dai Greci e dai Romani.

1202: Nicola Pisano (detto Fibonacci) pubblica il *Liber abbaci* (libro del **calcolo**), che porta dall'Africa settentrionale (dagli Arabi) il **sistema numerico decimale posizionale**, e il **calcolo in colonna** che diventa mezzo di calcolo popolare e insegnato nelle scuole.

XVI sec: John Napier (Nepero), pubblica le **tavole dei logaritmi** e il relativo calcolo.

XVII-XX sec: appaiono le **calcolatrici meccaniche** (W. Schickard, 1623), il **regolo calcolatore** (basato sui logaritmi) e le **calcolatrici elettriche**.
Scompare l'**utilità** del calcolo in colonna.
Seconda metà del XX sec.: **calcolatrici elettroniche**, **computer da tavolo**, **PC,…**
Inizi del XXI sec: concetto didattico di **apprendimento per competenza**, in informatica nasce l'«intelligenza artificiale». Occorre formare giovani capaci di agire in modo intuitivo e creativo, abituati ad affrontare situazioni nuove.
Il calcolo in colonna e l'apprendimento ripetitivo perdono importanza anche nella didattica.

Un modo diverso per imparare un concetto

Nella didattica teorica si studia l'apprendimento **endogeno**, cioè costruito, e non esogeno (trasmesso dall'esterno).
Come interpretare e mettere in pratica tale insegnamento del calcolo?

Un modo consiste nell'abituare la classe ad agire come «**gruppo di ricercatori»**.

Tutti gli alunni danno contributi (minimi o importanti, errati o corretti), tutti accettati e discussi, **condivisi** dalla classe intera a ogni passo compiuto.

Per far sì che questo funzioni è decisivo il comportamento dell'insegnante che deve riuscire da una parte a **stimolare tutti ad esprimere liberamente le proprie idee** (giuste o errate, importanti o poco utili) e dall'altra ad **assicurare che chi si è perso sia aiutato a compiere il passo mancante**.

Più che tentativi di rispiegare dell'insegnante servono i contatti fra alunni che, con il loro linguaggio particolare e per mezzo di esempi alla portata di tutti, riescono (quasi) sempre a farsi capire. In questo modo, ciò che hanno imparato diventa **cosa loro**.

Che cos’è il Calcolo Ragionato

Il **calcolo mentale** si è sempre praticato nella scuola tradizionale, soprattutto come **ginnastica mentale**.

Nel calcolo mentale, uno scoglio arduo da superare consiste nella necessità di memorizzare risultati parziali mentre si continua a eseguire calcoli successivi. Non per niente i *calcolatori prodigio* sono abili nel ricordare lunghe sequenze di numeri. (Hans Eberstark 1929-2001, traduttore al CERN di Ginevra, calcolatore)

Nel **calcolo ragionato** si evita questo ostacolo scrivendo l’intero procedimento **in riga** e imparando la **sintassi aritmetico-algebrica** (particolarmente l’uso delle parentesi) che nella scuola tradizionale gli allievi incontrano solo a partire dalla secondaria, il più delle volte senza altra motivazione se non quella di seguire l’insegnante memorizzando operazioni alle quali difficilmente riescono a dare senso.

In sintesi i vari aspetti del calcolo

calcolo mentale tradizionale (senza supporto carta-penna).

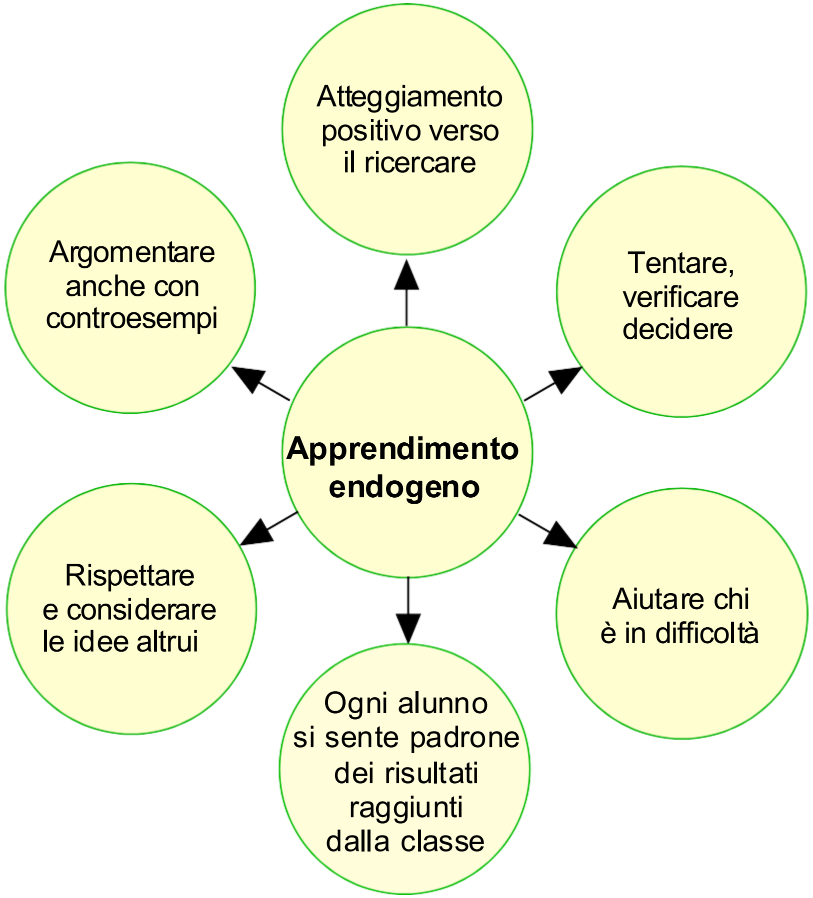
calcolo in colonna (esecuzione di algoritmi prefabbricati)

calcolo approssimato (la cui importanza, oggi, è evidente):
consiste nell'affrontare **situazioni numeriche complesse** allo scopo di ottenere velocemente un risultato approssimato.

calcolo strumentale: oggi usato ovunque, spesso male. Obiettivo della scuola di base è insegnare l'uso dello strumento elettronico, con particolare attenzione alla **credibilità** dei risultati forniti dalla macchina e all'**interpretazione** di tali risultati nel contesto del problema: insegnamento compreso nel Calcolo Ragionato.

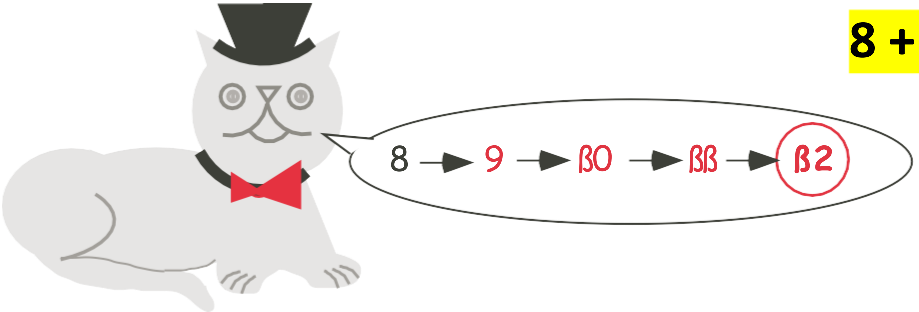
Sintesi. Calcolo Ragionato : **analisi** preventiva di un calcolo, **costruzione** di percorsi risolutivi, **calcolo in riga**, **sintassi aritmetico -algebrica**; **ragionamento, intuizione, creatività** (anche e soprattutto alla scuola primaria).

Concetti fondanti del calcolo numerico (parte didattica)



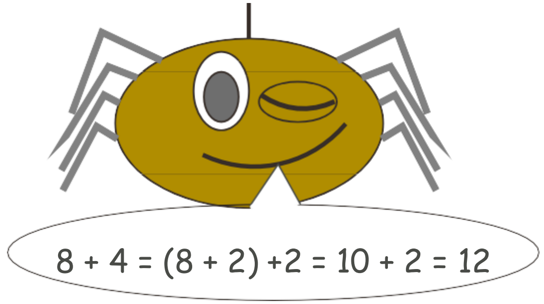
Esempi di calcolo Ragionato

Dal conteggio all’addizione e alla sottrazione, primi calcoli in riga



Dal conteggio…

8 + 4 = ?



… alle prime astuzie

23 + 40 = ?

23+40 = (2 da+3 u)+4 da = 6 da + 3 u

oppure **(20+3)+40 = (20+40)+3 = 60+3 = 63**

23 + 45 = ?

23 + 45 = (20+3)+45 = (20+45)+3 = 65+3 = 68

oppure: **23 + 45 = (20+3)+(40+5) = (20+40)+(5+3) = 60+8 = 68**

23 + 48 = ?

23 + 48 = (20+40)+(3+8) = 60 + (3+7)+1 = 60 + 10 +1 = 71

Ma anche:

23 + 48 = (20 + 40)+(8+3) = (20 + 40) + (8+2)+1 = 60+10+1 = 70+1 = 71

Oppure:

23 + 48 = (23+50) – 2 = 73 – 2 = 71

23 + 48 = (20+50)+3–2 = 70+1 = 71

(…)

Pluralità di modi = ricchezza intuizione, creatività, divertimento

23 + 18 + 37 = ?

23 + 18 + 37 = (23+37)+18 = (60+10)+8 = 70+8 = 78 (addendi che si combinano)

23 + 18 + 37 = (22+18)+1+37 = 40+1+(30+7) = (40+30)+8 = 78

23 + 18 + 37 = (20+20+30) + (3–2+7) = 70+8 = 78

(…)

Addizione e sottrazione … vanno a braccetto

8 + …… = 15 quanto manca all'8 per raggiungere 15? Si scrive: **15 – 8 = 7**

15 – 8 = (15–5) – 3 = 10 – 3 = 7 (sottrarre a pezzetti)

15 – 8 = (15–10) + 2= 5+2 = 7 (sottrarre multipli di 10 … e rimediare)

15 – 8 = (15–5) – (8–5) = 10–3 =7 (invariantiva)

15 – 8 = 2+5 = 7 (dal basso all'alto: da 8 a 10, poi da 10 a 15)

Pluralità di modi

E più avanti, per divertirci:

2025 – 1492 = ? (1492: scoperta dell'America)

$$\boxed{1492} \xrightarrow{+8} \boxed{1500} \xrightarrow{+500} \boxed{2000} \xrightarrow{+25} \boxed{2025}$$

Più elegante: **2025 – 1492 = 8+500+25 = 500+33 = 533**

(dal basso all'alto, modo da noi battezzato «della cameriera» o «del benzinaio»)

Addizione e sottrazione: uso della forma «polinomiale»

u significa **unità**, **da** significa **decina**, **h** significa **centinaio**, **k** significa migliaio

Esempi

64+78+37 = (6 da+4 u) + (7 da+8 u) + (3 da+ 7 u) = 16 da+19 u =

= (1 h+6 da) + (1 da+9 u) = 1 h+7 da+9 u = **179**

72–35 = (7 da+2 u)–3 da–5 u = 4 da+2u–5 u = 3 da+12 u–5 u = 3 da+7 u = **37**

Il calcolo in questa forma è impegnativo. Normalmente l'alunno non lo usa.

Si presta per riflessioni concettuali, può essere d'aiuto anche quando si è di fronte a un errore che non si capisce (radiografia del calcolo).

Il calcolo diventa veramente polinomiale quando i simboli si sostituiranno con le potenze di 10 (unità, decine, centinaia, ev. migliaia).

Questo modo è nient'altro che la **matematizzazione** di «prestito» e «importo» del calcolo in colonna.

Dall’addizione alla moltiplicazione

Le tabelline

Se non so 7x3, ma so 7x2=14 (in caso disperato 7x1=7), allora 7x3=14+7=21

Se non so 8x9, ma ricordo 8x8=64, allora 8x9=64+8=72.
O anche: 8x9=8x10 –8=80–8=72

Il ragionamento deriva dal concetto di moltiplicazione come **addizione ripetuta**.

Didatticamente si fa in modo che ogni alunno si senta libero di giocare con l’intera tavola pitagorica, applicando il ragionamento appena visto.

Col tempo e senza alcuna pressione da parte di insegnanti e genitori, l’alunno, **stufo di dover ogni volta eseguire addizioni noiose**, decide a poco a poco di memorizzare i vari risultati che si possono ridurre **da 100 a 28** (ce lo insegnò già Fibonacci nel suo *Liber abbaci,* XIII secolo).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Completa (100)

Ecco come si possono ridurre le tabelline (senza lo zero)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ridotta (28)

Iniziamo a cancellare la prima riga e la prima colonna: qualsiasi numero moltiplicato per uno …(19)

Analogamente cancelliamo l’ultima riga e l’ultima colonna: basta aggiungere uno zero a destra. «*Abbiamo già scoperto questa scorciatoia*». (17)

Si potrebbero anche cancellare la seconda riga e la seconda colonna: perché sin dalla prima ci siamo divertiti a raddoppiare un numero. (15)

Infine se 4x8=32, anche 8x4=32 e allora ne vanno via altre 21.

Totale rimanenti: 100–(19+17+15+21) = 100–72 = **28**

Oltre le tabelline

La distribuzione del fattore a ogni termine di un’addizione/sottrazione.

47x8 = (40+7)x8 = 40x8 + 7x8 = 320+56 = **376**

più modi

47x8 = (50–3)x8 = 400–24 = (400–20)–4 = 380–4 = **376**

47x8 = (47x2)x2x2 = (94x2)x2 = 188x2 = (200 –12)x2 = 400–24 =**376**

I divisori di 100

2x50=100, 4x25=100, 5x20=100, 10x10=100

15x80x17 = (3x5)x(20x4)x17 = 12x100x17 = (10+2)x17x100 = 204x100 = 20’400

I divisori di 1000

1000=2x500=4x250=5x200=8x125=10x100=20x50=25x40

4x17x250 = (4x250)x17 = 1000x17 = **17’000**

ben oltre la TP!

21x75x40 = (21x3)x(25x40) = 63x1000 = **63’000**

Bellezza, eleganza e utilità dei quadrati (facoltativo)

11x11 = (10+1)x11 = 110+11 = **121**

12x12 = (10+2)x12 = 120+24 = **144**

13x13 = 130+39 = **169**

15x15 = 150+75 = **225**

15x15 = 3x5x3x5 = 9x25 = (10–1)x25 = 250–25 = **225**

più modi

20x20 = 2x10x2x10 = 4x100 = **400**

20x20 = (4x5)x(4x5) = 16x25 = 8x50 = **400** ; 30x30 = **900** ; 40x40 = **1600** ; ...

Esempi di uso dei quadrati nel calcolo

48x12 = (4x12)x12 = 4x144 = 400+160+16 = **576**
48x12=24x24=12x2x12x2=(12x12)x4=144x4=288x2=(300 –12)x2=600–24=**576**

39x26 = 13x3x13x2 = (13x13)x(3x2) = 169x6 = 600+360+54 = 960+54 = **1014**
39x26 = (40–1)x26 = 1040–26 = **1014** (...)

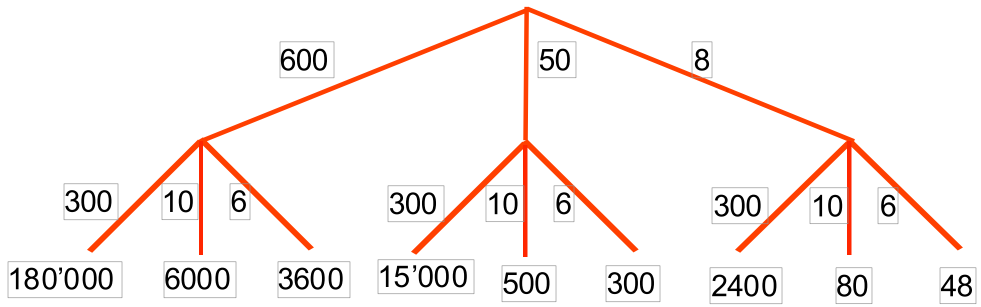
E se dovessimo calcolare **658x316**? (al limite della ragionevolezza)

Ecco due modi diversi che mostrano schematicamente la distribuzione.

La tabella moltiplicativa

x	600	50	8
300	180’000	15’000	2400
10	6000	500	80
6	3600	300	48

L’albero moltiplicativo



Da entrambi gli schemi si ricava (esempio di calcolo):

658x316 = 180’000+15’000+2400+6000+500+80+3600+300+48 =

= 180’000+21’000+6500+428 = 180’000+27’500+428 = 207’500+428 = **207’928**

Dalla moltiplicazione alla divisione

Analogamente al passaggio «addizione-sottrazione»

4 x …… = 24 problema inverso della moltiplicazione. Si scrive **24:4 = 6**

Direttamente dalla TP: 15 : 3 = ? 28 : 7 = ? 8 x …… = 40

98 : 7 = ? Il 98 non c'è nella TP!

Sì, ma 98 = 70+28, quindi **98**:7 = (**70**+**28**):7 = **70**:7 + **28**:7 = (distribuzione!) = 10 + 4 = **14**

È l'unico modo? No, si possono eseguire altre scomposizioni del 98 in numeri della tabellina del 7 (**multipli** di 7).

98:7 = (**49**+**49**):7 = **49**:7 + **49**:7 = 7+7 = **14** (e altri ancora…)

ATTENZIONE!

Funziona anche così?

2550:15 = 2550:(10+5) = 255+510 = **765 ???** **No! Così non funziona** (2550:15 = **170**)

Divisioni più difficili, ma ragionevoli

549 : 9 = ?

Concetto base: la divisione come **contenenza**. Quante volte il 9 sta in 549?

Scomponiamo, 549 = 90+90+90+90+90+90+9, distribuendo «:9» a **ogni** addendo otteniamo 549:9 = 6x10+1 = **61**

Con un po' di abilità in più: 549:9 = (540+9):9 = (**54:9**)x10 + 9:9 = **6**x10+1 = **61**

Ancora più difficile (ma bello…)

1330 : 35 = ? cioè: quante volte il 35 sta in 1330?

Scomponiamo in … multipli di 35. Il multiplo più comodo potrebbe essere 350.
1330 = (**350+350+350**)+ (**70**+**70**+**70**+**70**) = **30**x35 + **8**x35 , quindi
1330 : 35 = (**30**x35):35 + (**8**x35):35 = **30** + **8** = **38**

Esecuzione più veloce:
1330:35 = (**30**x35):35 + (**8**x35):35 = **30**+**8** = **38**

Modo più concreto: con mattoni e prefabbricati

1330 : 35 = ?

Pensiamo a un muratore che deve costruire un bordino lungo 1330 mattoni.
Si procura dei mattoni lunghi 35 e prefabbricati da 10 mattoni

1330 = 350x3+35x8

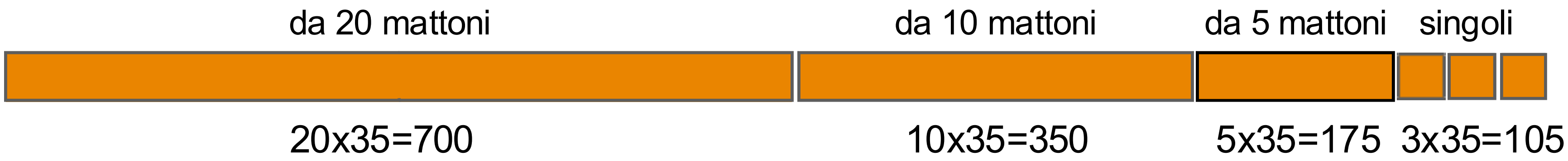
Quindi:

1330:35 = (**30**x35+**8**x35):35 = (**30**x35):35+(**8**x35):35 = **30**+**8** = **38**

Altra possibilità

1330 : 35 = ?

Pensiamo ancora al muratore che deve costruire un bordino lungo 1330 mattoni.
Si procura prefabbricati da 20, da 10, da 5 e alcuni mattoni singoli.



1330 = (700+350+175)+105 = (**20**x35+**10**x35+**5**x35+**3**x35)

Quindi:

1330:35 = (**20**x35+**10**x35+**5**x35+**3**x35):35 =

= (**20**x35):35+(**10**x35):35+(**5**x35):35+(**3**x35):35 =

= **20**+**10**+**5**+**3** = **38**

E con i numeri decimali, come facciamo?

Principio: ogni calcolo con numeri decimali può essere tradotto in uno con soli numeri interi.

Esempi

Per **addizione** e **sottrazione** basta scegliere l'unità minore:

5,53+0,7 = 553 c + 70 c = 623 c = **6,23**

10–0,62 = 1000 c – 62 c = 938 c = **9,38**

Per la **moltiplicazione** occorre conoscere almeno i prodotti basilari:

d x d = c , **d x c = m.** , (uxu=u , dxu=d , cxu=c , mxu=m sono risultati ovvi)

0,8 x 0,9 = 8 d x 9 d = 72 c = **0,72**

7,7 x 0,03 = 77 d x 3 c = (70+7)x3 m = (210+21) m = 231 m = **0,231**

Per la **divisione** si sceglie la stessa unità e il risultato appare già in forma standard!

2,4 : 0,03 = 240 c : 3 c = 240 : 3 = **80**

3,63 : 0,033 = 3630 : 33 = (3300+330):33 = 100+10 = **110**

Divertiamoci calcolando-ragionando

Per ragionare insieme …

574–256 = (500–200)+(70–50)+4–6 = 300+20+4–6 = 324–6=

= 324–4–2 = 320–2 = **318**

574–256 = (550–250)+24–6 = 300+24–6 = 324–6 = **318**

574–256 = (574–250)–6 = 324–6 = **318**

574–256 = (580–250)–6–6 = 330–12 = **318**

574–256 = 4+40+200+74 = 248+70 = 248+60+10 = 308+10 = **318**

$\mathbf{38 \times 7} = (30+8) \times 7 = 210+56 = \mathbf{266}$

$\mathbf{38 \times 7} = 7 \times 38 = 7 \times 40 - 14 = 280 - 10 - 4 = 270 - 4 = \mathbf{266}$

$\mathbf{38 \times 7} = 38 \times (5+2) = 38 \times 5 + 38 \times 2 = 380:2 + 76 = 190 + 76 = 190 + 10 + 66 = \mathbf{266}$

$\mathbf{67 \times 49} = 67 \times (50 - 1) = 67 \times 50 - 67 = (67 \times 100):2 - 67 = 3350 - 67 =$

$= (3350 - 50) - 17 = 3300 - 20 + 3 = 3280 + 3 = \mathbf{3283}$

Oppure usare tabella o albero moltiplicativi.

1152:64 = ?

Prefabbricati: da **10** mattoni, lunghezza **640**

da **5** mattoni, lunghezza **320**

3 mattoni singoli, lunghezza 192

1152 = 640+320+192 = **10**x64+**5**x64+**3**x64

1152:64 = (**10**x64):64+(**5**x64):64+(**3**x64):64 = 10+5+3 = **18**

Calcolo approssimato

Il nuovo ruolo del calcolo approssimato

Oggi il calcolo approssimato è diventato importante soprattutto perché permette di stimare il risultato di procedimenti di calcolo anche complessi.
L'obiezione che nasce facilmente è: «Ma gli strumenti elettronici di calcolo **non** fanno errori, allora perché stimare?» (… ma gli operatori, sì!)
Principio basilare: l'essere umano non deve diventare schiavo della macchina, ma considerare quest'ultima come mezzo per svolgere operazioni complesse in pochissimo tempo, lasciando così agli esseri umani i compiti che richiedono astuzia, intuizione, creatività e determinazione.
A scuola si deve compiere il primo passo basilare: insegnare a usare correttamente e opportunamente lo strumento di calcolo (calcolatrice o PC).
Altra obiezione: «I giovani di oggi sono molto abili con gli strumenti elettronici, che cosa può insegnare la scuola?»
Risposta: insegnare a usare gli strumenti di calcolo in modi opportuni.
[Non vogliamo più vedere studenti che ricorrono alla calcolatrice per calcolare 27x4]

Esempi di calcolo approssimato

Ricavo medio (in €) della bancarella natalizia

LUNEDÌ	MARTEDÌ	MERCOLEDÌ	GIOVEDÌ	VENERDÌ	SABATO
63,38	62,50	64,00	61,98	61,75	63.20
63	**62**	**64**	**62**	**62**	**63**

(ricavi arrotondati)

Calcolo approssimato del ricavo medio

$63+62+64+62+62+63 = 2x63 + 3x62+64 = 126+(186+64) = 126+250 = 376$

$376 : 6 = (360+16) : 6 \cong 360:6+\mathbf{18}:6 = 60+3 = 63$ (€)

Per curiosità, risultato della calcolatrice: $62,\overline{6}$ [Risultato credibile!]

Educazione all’uso dello strumento di calcolo (calcolatrice)

(3,857 x 9,089) : 0,1132 = ? (in mm)

Stima del risultato (calcolo ragionato)

(4 x 9) : 0,11 = 36 : 0,11 = 3600 : 11 ≅ 3600 : **12** = **300** (mm)

Con la calcolatrice

$\boxed{3,857}$ $\boxed{x}$ $\boxed{9,089}$ $\boxed{:}$ $\boxed{0,1132}$ $\boxed{=}$ **309,68439**

Controllo: risultato credibile. **Interpretazione**: 310 mm = **31 cm**

Calcolo del raggio di una circonferenza di 65,57 (m)

$$2\,\pi\,r = 65{,}57 \longrightarrow r = \frac{65{,}57}{2\,\pi}$$

Stima r ≅ **66** : (2x3) = 66 : 6 = **11**

Con la calcolatrice r ≅ 10,43579 (m)

Interpretazione r = **10,44** (m)

Risultato credibile.

Educazione all’uso dello strumento di calcolo (sc. primaria: calcolatrice)

Esempio: Calcolare i rapporti tra i **diametri** di: SOLE/TERRA e GIOVE/TERRA.

DIAMETRI IN km		
SOLE	**TERRA**	**GIOVE**
1'392’000	12’756	142’740

Soluzione

Stima dei risultati:

D. Sole/D. Terra ≅ 1’400’000 : 13’000 = 1400 : 13 ≅ **1300** : 13 = **100**

D. Giove/D. Terra ≅ 143’000 : 13'000 = 143:13 = (130+13):13= **11**

Risultati calcolatrice:

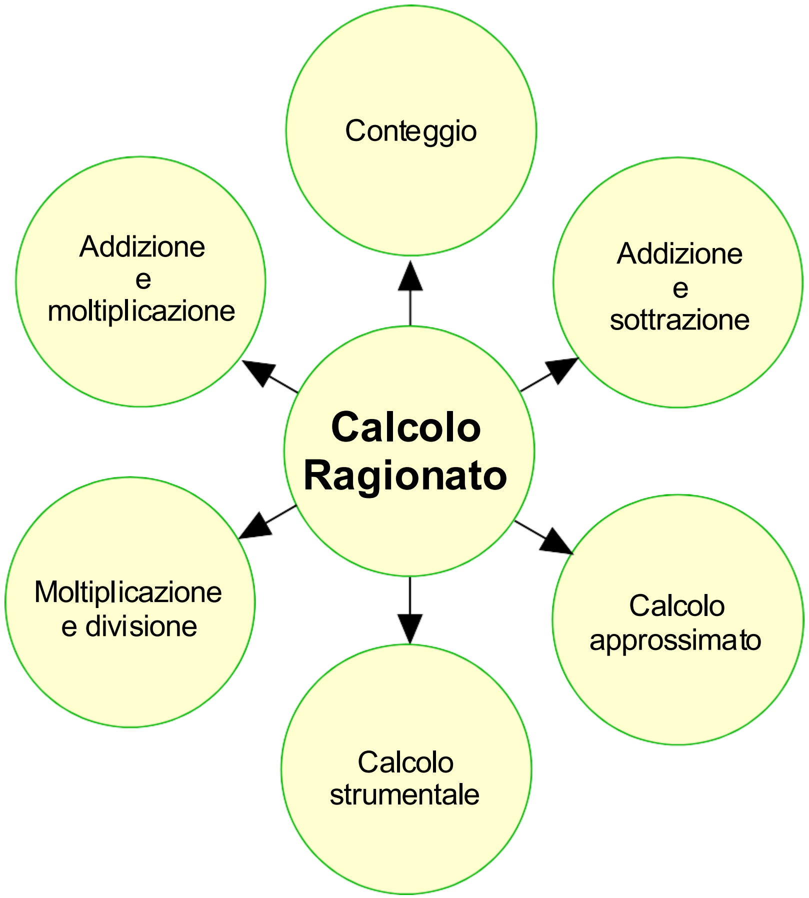
D. Sole/D. Terra = 1'392’000 : 12'756 ≅ **109,125** (risultato credibile)

D. Giove/D. Terra = 142’740 : 12'756 ≅ **11,19** (risultato credibile)

Interpretazione dei risultati:

D. Terra sta circa 110 volte in D. Sole; D. Terra sta circa 11 volte in D. Giove.

Concetti fondanti del calcolo numerico ragionato



FINE

INDIRIZZI UTILI

gianar76@gmail.com / maddalenacrea@hotmail.it
marinagiacobbe7@gmail.com / lorellamaurizi@gmail.com

BIBLIOGRAFIA ESSENZIASLE

Arrigo G. (2023). *Insegnare matematica con i concetti fondanti nella scuola primaria*. Edizioni: Lisciani Scuola (ISBN 978-88-7627-607-1)

Arrigo G., Creati M., Giacobbe M., Maurizi L.
Nella mia classe, tutto è possibile! Edizioni: Sapyent
(Sfogliabile e ordinabile su www.sapyentbooks.com)

Arrigo G., Creati M., Giacobbe M., Maurizi L.
Nella mia classe, la geometria è dynamica
Edizioni: Sapyent
(Sfogliabile e ordinabile su www.sapyentbooks.com)

GRAZIE !